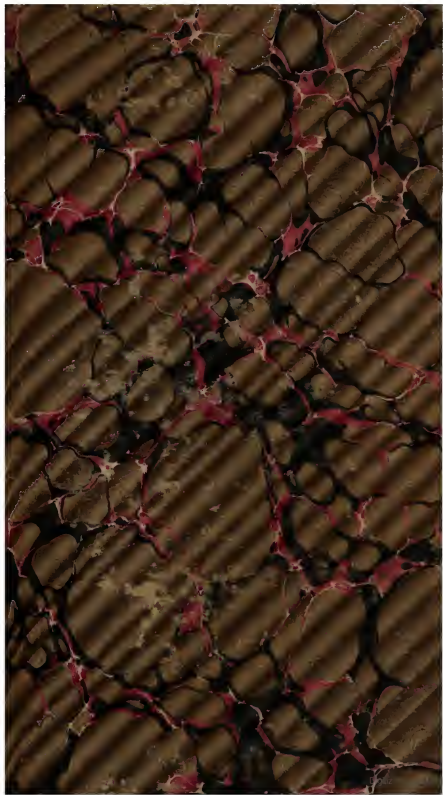




11.4.96





DELL' INSEGNAMENTO

PRIMITIVO

DELLE

MATEMATICHE

DI

GIANDOMENICO ROMAGNOSI

~~~~~  
*TOMO I.*  
~~~~~

MILANO

PER GIOVANNI PIROTTA

1822.

Ai Signori della Missione

Direttori del Collegio Alberoni

di Piacenza.

Io dedico a voi questo tenue mio lavoro per professare sì al pubblico che a voi quella gratitudine che ho sempre sentito e che sento ancora vivissima nell'età mia inoltrata, per l'istruzione e per l'educazione ricevuta in codesto Collegio, e per l'amorevolezza veramente paterna colla quale trattate i vostri Alunni. Intendo ancora di significarvi che io eccettuo il vostro modo d'insegnamento dagli altri praticati, poichè io l'ho riconosciuto veramente pieno e fatto con buona fede. Possa la Provvidenza Divina a gloria e vantaggio di codesto Paese e dell'Italia tutta

conservare codesto collegio, e non sottrarlo mai
alla vostra direzione. Io mi ricordo ancora le
parole che, alunno, intesi da un dotto Cardinale:
Signori (egli disse) si approfittino di un tanto
benefizio, *quia non fecit taliter omni nationi*,

Li 29 settembre 1821.

Il fu vostro alunno
GIANDOMENICO ROMAGNOSI.

MOTIVO DELL' OPERA.

Perchè pubblicate voi questo scritto a fronte del grandioso aspetto che in oggi hanno le matematiche, e delle opere innumerevoli e grandi e piccole sparse in Europa? — Perchè la storia tutta fa fede, a chi sa leggerla, che la matematica ha assaissimo contribuito ad introdurre, aumentare e mantenere la vita civile in tutte le parti del globo, è perchè penso che trattata nel suo intiero e insegnata da principio come si deve, possa ancora fare molti progressi, soprattutto necessari alle scienze naturali e alla teorica delle arti.

Credete voi dunque di vedere di più di quello che abbiano veduto gli altri? — Io confesso di non conoscere tutto quello che hanno veduto gli altri, ma conosco il metodo primitivo usitato presso di noi. In caso poi che avessi veduto più degli altri, io sarei il fanciullo posto sulle spalle del gigante che vede più lontano del gigante medesimo. Usando dell'eredità trasmessami da' miei antenati, io mi credo in dovere, per quanto è da me, di accrescerla, quand'anche prestar non potessi che un obolo. Il tempo deciderà del di lui valore.

Questo scritto non contiene che una proposta generale dell'oggetto assunto. So che trattando di cose pra-

tiche convieue scendere al particolare, e questo manca ancora. Prematura dunque può sembrare la pubblicazione de' miei pensieri; ed io potrei essere accusato di frettolosa vanità. Rispondo, che se i precetti pratici non fossero la conseguenza di principj solidi, e se io presumessi di possedere a fondo questi principj, io meriterei allora questa censura. Ma io non nutrisco questa presunzione; e però abbisogno del giudizio altrui sulla verità ed opportunità di questi principj prima di mostrare i precetti che ne derivano. Quando questi siano o sanzionati o corretti col voto o colla censura degli intendenti, e quando la fortuna non osti al mio buon volere, io sono determinato di scendere al particolare domandato.

In aspettazione di ciò, io dichiaro che le censure mie al metodo usitato non intendo che detrarre debbano nulla al merito personale di chi lo esercita, ben sapendo che i precettori non sono liberi di cangiar metodo a loro beneplacito. Molto meno pretendo d' insegnar nulla di nuovo nè ad essi nè ad altri, ma solamente di provocare l'attenzione di tutti sulla maniera del primitivo insegnamento. Organo d'una generazione ancora ignorante, io imploro a di lei nome una riforma utile di primo insegnamento. Ma prima domando se i motivi della mia preghiera siano giusti. Ecco in sostanza l'intenzione colla quale mi presento al Pubblico.

Li 29 settembre 1821.

ROMAGNOLI.

DELL' INSEGNAMENTO

PRIMITIVO

DELLE

MATEMATICHE

INTRODUZIONE.

Qual è la differenza che passa fra un calcolatore e un matematico? — Quella che passa fra un semplice farmacista ed un chimico, fra un materiale fabbricatore di lenti o di stromenti metrici, ed un perito in ottica e in geometria. In breve la differenza consiste nel fare una cosa materialmente o nel farla con *cognizione di causa*, empiricamente o filosoficamente. Il semplice calcolatore si dirà dunque matematico empirico; ed il vero matematico si dirà matematico filo-

sofo. Ora vi domando se esistano molti matematici filosofi, o se pure il massimo numero eserciti il calcolo più empiricamente che con cognizione di causa? Vi domando di più se veramente dalle matematiche si ritragga tutto quel frutto che pretendere se ne potrebbe?

Che altro è in sostanza la matematica, fuorchè la logica della quantità? A che servir deve principalmente la matematica, se non che all'utile nostro? Ora domando se dessa venga insegnata a dovere? — Per decidere la quistione conviene conoscere in primo luogo quale sia lo scopo di ogni buon metodo d'insegnamento.

Ottenere nella maniera la più breve, la più facile e la più proficua la cognizione, o l'operazione proposta, costituisce indubitabilmente l'eccellenza d'ogni metodo. Ma la cognizione vera delle cose non dipende dal nostro arbitrio, come non dipendono dalla nostra potenza le forze che facciamo operare. Le cognizioni sono determinate dai rapporti reali e necessari che passano fra la nostra intelligenza ed i genuini concetti delle cose. Convien dunque conoscere i caratteri da noi discernibili degli oggetti, e le leggi della nostra intelligenza per determinare la migliore

maniera di studiarli. I migliori metodi dunque d'istruzione non possono essere che ultimi frutti d'una scienza consumata.

Io parlo dei metodi d'istruzione e non di quelli d'invenzione; perocchè a chi conosce la storia dello scibile umano vien reso manifesto che dapprincipio gli uomini s'incamminano per la buona strada; nel mezzo traviano, ed infine ritornano sul buon sentiero. Ciò è avvenuto anche nelle matematiche. Da principio fu considerata la quantità come qualunque altro fenomeno apparente della natura. S'incominciò a lavorare sul circolo e si studiarono le affezioni ed i rapporti che si presentavano, come si farebbe nell'esame d'un vegetabile o di un animale. Una moltitudine quindi di tavole, dirò così, anatomiche, della quantità fu disegnata, dallo studio delle quali dedur si potevano i caratteri, le derivazioni, le connessioni, i passaggi delle quantità, onde formare un tutto armonico, collegato ed unito. Per questo mezzo furono fatte scoperte, deduzioni, applicazioni, le quali altrimenti sarebbe stato impossibile di ottenere.

Finchè lo spirito umano fu mero contemplatore e docile discepolo della natura, tutti i di lui passi furono utili ed instrut-

tivi: ma dopo che i pensatori vollero operare da sè, il lusso della scienza sotten-
trò all'economia, e la difficoltà alla fa-
cilità. Allora il primo e naturale metodo
fu abbandonato, e si sostituirono cog-
nizioni di *risultato* circoscritte, interrotte,
mancanti di radici sensibili e di genesi pro-
pria, talchè meritano piuttosto il nome di
estratti, che quello di dimostratori diretti
della generazione e del nesso della scienza.
Tali cognizioni pertanto si affacciano a guisa
d'isolati rottami d'un edificio artificiale, e
però gli apprendenti le colgono con difficoltà,
nè possono da esse ricavare il frutto proposto.

Se questo metodo d'insegnamento è per-
nicioso in qualunque scienza, lo è assai più
nelle matematiche. In essa le poche nozioni
radicali sono così semplici, dipendenti e ge-
nerate da una segreta unità, che senza di
una esatta proposta e di una graduale e con-
nessa esposizione, rimangono sempre imper-
fette e sempre sterili.

Certamente i primi scopritori hanno do-
vuto praticare il buon metodo. Dacchè mai è
derivato ch'egli poscia fu abbandonato? Pare
che questo abbandono primariamente derivi
sì dall'impazienza di farsi, dirò così, fan-
ciulli, e sì dall'imprestare la nostra intelli-

genza agli altri. Io non parlo qui dell' impazienza degli inventori di saltare ai generali prima di avere gradualmente ben esaminati i particolari. Questo pare un destino comune a tutti i rami dello scibile , nei quali si verifica la storiella di quel Francese che avendo fatto una piccola gita oltre il Reno , ed essendosi incontrato in un' ostessa rossa di capelli e rabbiosa , scrisse nel suo giornale , che tutte le ostesse di Germania sono rosse e rabbiose. Io parlo di un difetto nel quale cadiamo pur troppo anche nell' esporre le cognizioni ben concepite e ben dedotte. Il camminare a piccoli passi reca una specie d' affanno a chi può di slancio percorrere tutta la strada. Dall' altra parte poi noi siamo portati a credere che il senso di convinzione predotto in noi da un principio o da una dottrina da noi intesa , debba facilmente prodursi anche negli altri , e però si usano modi compendiosi. Ma le parole che suonano così per voi , non suonano così per gli altri meno illuminati di voi. Sono le idee *associate* e non *esprese* , le quali propriamente decidono sempre del concetto d' una nozione astratta o generale.

Incominciato una volta questo metodo artificiale dagli uni , egli viene praticato e con-

tinuato dagli altri. Così il primo naturale viene abbandonato e dimenticato per attenersi all'artificiale creduto più degno e più utile. Ivi, si dice, sta il frutto: chi possiede le nozioni di risultato, eminentemente possiede tutto, e però insegnando queste s' insegna come si deve. Ma con questo modo d'insegnare si cade in una vera estremità contraria ai bisogni delle successive generazioni sempre nuove al mondo come i primi inventori della scienza.

La scuola d'Alessandria era forse già caduta in questa estremità. Quando essa non abbia avuto altri libri elementari che simili a quelli di Euclide, di Pappo, di Apollonio ecc., noi dovremmo confessare che erasi già allontanata dalla buona strada. Quello che è certo si è che i metodi che risultano dai libri superstiti, furono quelli che nella primitiva istruzione vennero seguiti fino ai giorni nostri. Noi anzi, invece di migliorarli, gli abbiamo peggiorati, senza accorgerci che essi sono pessimi per incominciare. Pessimi sì per mancanza di opportunità che per mancanza di economia. Per mancanza di opportunità perchè l'aspetto delle cognizioni non è adattato nè alla capacità intellettuale degli apprendenti nè alla generazione logica della

dottrina. Per mancanza di economia poi, perchè, lungi di preferire le cognizioni che servir debbono agli usi della vita, si disperde l'attenzione, e si consuma il tempo sopra ricerche di puro lusso. Di questo lusso si lagnarono di già matematici celebri, e fra gli altri il d' Alembert. Si dirà che questo lusso cade nei rami superiori dello studio. Ma esso non succederebbe se la prima istruzione fosse amministrata a dovere. Quando fosse ben piantata, essa darebbe una tale direzione all' nostre ricerche, che nell'atto di pascolare la curiosità degli indagatori li condurrebbe, anche all' insaputa loro, verso la meta proficua della scienza.

Ma senza discostarci dalle considerazioni comuni a tutto lo studio delle matematiche, osservo che havvi un fatto di esperienza sperimentato da tutti coloro che si applicarono con fervore e profitto agli studj matematici, e questo si è che le cose apprese vengono prontamente dimenticate in guisa da non poterle più richiamare. Ma se queste cognizioni, oltre di essere esposte con quel metodo che insegna di procedere dal sensibile all' intellettuale, dal concreto all' astratto, dal particolare al generale, dal diviso all' unito, fossero ben simboleggiate ai sensi e racco-

mandate alla fantasia, a me pare che, lungi dal cadere sì prestamente in obblivione, esse si radicherebbero meglio delle altre nella nostra memoria. La possanza del calcolo forma un gran trionfo dell' umana intelligenza. Per lui l' uomo sembra alzarsi a volo dall' angusto cerchio della naturale sua comprensione per andare ad affrontare l' infinito o per internarsi nei recessi delle leggi dell' universo. Ma dall' altra parte è pur vero che questo calcolo fu tratto in priina dal più concreto dei nostri sensi, cioè dal tatto, e quindi dalla vista associata al tatto. Dunque fra le cifre aritmetiche ed algebrache ed i concetti mentali, essere vi deve una *rappresentazione naturale intermedia*, la quale vada di pari passo, e serva, dirò così, di specchio sensibile all' esercizio del calcolo, come servì alla sua invenzione. Senza di ciò noi camminiamo o ad occhi chiusi o al favore soltanto di un languidissimo barlume. Il calcolo diviene così uno sterile meccanismo, il valor del quale non è comprovato che dal solo effetto. Le idee matematiche sono di un' indole *speciale*, che importa un magistero rappresentativo speciale. Figlie dei sensi e della ragione, non trovano nè fuor di noi qualche cosa che le rappresenti, nè dentro di noi qualche

cosa che le suggerisca. Poste fra il fisico e il morale, esse abbisognano d'essere rappresentate prima *simbolicamente* per essere poi richiamate verbalmente, ossia coi segni di convenzione.

Quest'osservazione è forse nuova, ma è importante e decisiva per la sorte intiera della scienza. Essa abbisogna non solamente come le altre nostre produzioni intellettuali, d'essere rappresentata in una sola maniera, ma di essere espressa in due maniere diverse. Considerando in generale i progressi dell'umana ragione, si scopre che col distinguere si crea la ricchezza, e col rappresentare si dona la possanza razionale. La ricchezza sarebbe perduta se la rappresentazione non la coprisse colle sue divise. Mirabile e possente è talmente il magistero rappresentativo, che pare costituire il dominio eminente del mondo umano. Vedetene la prova nella moneta, nella scrittura, nei pesi, nelle misure, nella bussola nautica, nei barometri, termometri, igrometri, ne' pesa-liquori, e in mille altri stromenti e segnali che ci assicurano delle qualità o quantità delle cose, dei fatti, e perfino delle nostre stesse volontà ecc. ecc. I progressi del magistero rappresentativo, come assicurano, così testificanq

visibilmente le cognizioni nostre crescenti. Ma esso variar deve a norma del bisogno. Quando esso applicato viene alle cose fisiche, egli ha l'oggetto suo corrispondente rappresentatoci dai sensi, e quindi dalla memoria. Quando esso esprime qualche nostro sentimento, qualche nostro bisogno, qualche nostra passione, esso ha pure nel mondo interiore il suo oggetto intelligibile fabbricato, dirò così, dalla natura; ma quando versa sulle idee matematiche, esso non può ricorrere alla rappresentazione verbale, se prima non compie la razionale.

Voi mi direte che in matematica vi sono le figure, le cifre numeriche e gli altri segni. Ma di buona fede credete voi che desse siano e tali e tante da supplire al bisogno dello spirito degli apprendenti, e che la maniera colla quale vengono usate supplisca a questo bisogno? Questa ricerca mi porterebbe a trattare un argomento speciale sul quale dovrò appunto dir qualche cosa. Basti tutto questo per far *presentire* il bisogno di riformare il primitivo insegnamento delle matematiche. Io qui prescindo da quei motivi che riguardano l'intima natura dei metodi complessivi della scienza. Posto tutto questo, e volendo tracciare un buon metodo d'istruzione, parmi

che convenga considerare tre cose ad un tratto , cioè :

Prima. Che cosa esiga da noi la cognizione più breve , più facile e più proficua del vero , avuto riguardo all' *indole propria della materia* da insegnarsi.

Seconda. Che cosa esiga , avuto riguardo allo *scopo morale e sociale* a cui destiniamo l'insegnamento.

Terza. Che cosa esiga finalmente , avuto riguardo allo *stato particolare* ed al *bisogno* degli apprendenti.

I *risultati* di queste tre considerazioni contemplate le une colle altre formano le *condizioni* di qualunque buon metodo d'insegnamento. In conseguenza di queste condizioni si stabiliscono le regole. Ampio lavoro si richiederebbe se si volesse di proposito trattare di queste tre inspezioni tanto in generale quanto in particolare per le matematiche. Ma non intendendo che di *motivare una proposta* , credo che basti di accennare alcuni principj che più davvicino riguardano la *primitiva istruzione matematica*.

DISCORSO PRIMO

*Sull' indole e generazione naturale
dei primitivi concetti matematici.*

1. **E**saminando i termini della prima ispezione, essa ci porta alla ricerca; *quale idea formar ci dobbiamo della natura e della generazione degli enti matematici*; ossia meglio dei concetti primitivi che intervengono come elementi nella scienza della quantità. Questa ricerca dopo tanti secoli dovrebbe essere stata esaurita, e quindi la risposta dovrebbe essere in pronto. Ma considerando attentamente le cose che si dettano e s'insegnano, siamo noi certi di poter rispondere con verità? L'esame di alcune sentenze fondamentali dei matematici ci convincerà che noi abbiamo ancora di un' analisi psicologica di questi primitivi concetti. Ma essi come costituiscono l'abbiacci della scienza, somministrano pure i primi lumi logici del metodo: la cognizione dunque almeno abbozzata della loro indole e generazione vera naturale è indispensabile per stabilire le condizioni di questo metodo.

2. I primi concetti matematici sono quelli che versano sull'*estensione*. Una grandezza senza *forma* in geometria è un assurdo filosofico. Le astrazioni colle quali si è preteso di generare gli enti geometrici, debbono essere uniformi alla natura logica delle cose ed alla maniera con cui opera il nostro intelletto. Con un'astrazione non è permesso di cangiare l'essenza del concetto originario, ma unicamente si deve *far avvertire* all'idea ultima che si è voluta distaccare dalle altre. L'idea astratta adunque deve portar l'impronta autentica della sua origine, altrimenti essa è, dirò così, apocrifa, e quindi falsa in fatto. Seguendo questo principio io non dirò mai, per esempio, che la linea sia prodotta dal flusso del punto indivisibile, ma dirò invece che dessa è l'*estremità* d'una superficie. Difatti il concetto della linea si genera in noi, concentrando l'attenzione su questa estremità. L'idea nata da questa concentrazione *separata* dalle altre si chiama astratta. Segnata con un nome, appellasi *linea*. Voi presentando, per esempio, una carta bianca tagliata sotto una forma qualunque, fissando l'attenzione sul suo *contorno*, formate l'idea della linea o retta o curva a norma della forma che avete sott'occhio. Di-

videndo poi questo contorno in minime parti e fermando l'attenzione su di una di esse, estraete l'idea del punto; come pure la formate immaginandovi un rotondo appena discernibile o tutto nero,

L'idea del flusso di un punto è tutta artificiale per far intendere come si formerebbe la linea se si potesse sola generare in natura. Essa è l'operazione inversa della astrazione già fatta. Ma altro è il meccanismo manuale, ossia la formazione artificiale d'una cosa, ed altro è la generazione logica o psicologica della medesima. Voi, per esempio, descrivete l'elisse col giro di un filo raccomandato a due punte; voi costruite la parabola con un filo attaccato e col movimento di una squadra: direte voi perciò che questa sia la generazione *naturale* di queste curve? No, certamente, perchè un altro ve le presenterà con un taglio del cono, e qualche altri forse con altro strumento. Le costruzioni nostre artificiali *consequenti* allo studio non formeranno mai l'*origine naturale* d'un'idea presentataci dalla natura. Ma anche dato che voi vogliate per comodo nostro spiegar come si possa simboleggiare e descrivere una linea ed un punto, lungi che voi possiate applicare loro l'attributo d'inesesi, vi ponete

anzi nell' impossibilità di far nascere questo concetto. La mano e l'occhio non creano nè crear possono cose inestese o invisibili. Più ancora, dalle cose vedute o toccate è assolutamente impossibile ricavare l'idea dell' invisibile e dell' inesteso. Ma voi generar volete l'estensione per mezzo dell' inesteso, nell'atto stesso che in una maniera sensibile, mediante il movimento della linea, fate nascere la superficie e il solido. Così ponete e negate ad un tratto l'estensione. Ma per quanto vogliate illudere voi stessi ed altri, voi non potete mai e poi mai riuscire ad accozzare assieme questi concetti. Da ciò ne viene che a dispetto dei matematici il concetto del punto e della linea non si possono spogliare giammai dell'idea d'una minima discernibile estensione.

3. Il *punto*, dicesi, è il *principio di tutto*. Ed io rispondo che è il *principio formale* di nulla. Immaginate una figura; impiccolitela quanto volete, essa sarà sempre o un circolo, o un quadrato, o un triangolo ecc. ecc. Convertirla in un punto non solamente è un distruggere il concetto di lei, ma egli è un pretendere che il punto possa essere ad un tempo stesso circolo, quadrato, triangolo, ossia che il suo concetto possa simultaneamente essere iden-

tico e diverso. Qui non v'è mezzo; o conviene che il concetto del punto sia nello stesso tempo concetto di tutte queste cose insieme (locchè è logicamente impossibile), o conviene che non sia veruna di esse; perchè il concetto del punto è essenzialmente diverso da quello di ogni determinata figura. Ridotta dunque la figura al minimo termine possibile immaginario, essa rimarrà sempre com'è, perchè la sua forma costituisce la sua essenza. Devesi dunque ammettere in geometria una specie d'impenetrabilità logica, come in fisica si ammette l'impenetrabilità materiale. Anzi a dir vero l'impenetrabilità logica è ancor più manifesta della materiale.

Ciò non è tutto. Supponendo il punto *inteso* essenzialmente si esclude la possibilità di formar l'esteso, perchè il concetto della negazione esclude quello dell'affermazione. Il concetto negativo dell'estensione ripugna al concetto positivo della medesima, come il nulla ripugna all'essere, e il bujo all'illuminato. Ma supponiamo il punto anche *esteso*; egli tuttavia non potrà logicamente essere il principio formale della figura, perchè la forma individua d'una figura non può ripetere il principio che dalla stessa sua essenza. Per quella ragione che il primo esteso ripete da

sè stesso la propria forma, ogni altro esteso la ripeterebbe sempre da sè medesimo. La forma univoca d'una figura o semplice o complessa è logicamente unica, indivisibile e *propria*, talchè non può risultare che da un concetto univoco e indipendente da ogni altro. O convien abolire il concetto dell'*essenza logica* delle cose, o conviene concedere che il principio della figura sia la stessa figura.

4. La mente umana ragionar non può che sulle *essenze logiche*, e trar la certezza e la evidenza che dalla loro considerazione. L'*essenza logica* altro non è che *quel tal* concetto, senza del quale *non possiamo* affermare che una cosa sia o possa essere. Pensando quindi che una cosa esista o possa esistere, noi giudichiamo essere *impossibile* la sua esistenza senza presentare questo suo concetto. Il verbo essere inchiude queste idee. Quando parliamo di oggetti distinti, parliamo di oggetti particolari; e quando parliamo di particolari *diversi*, noi concepiamo in uno ciò che non concepiamo negli altri. Le essenze dunque particolari sono necessariamente *qualificate*, ossia hanno ognuna un determinato carattere. Ma dall'altra parte tolti questi caratteri, il concetto della cosa svanisce. Dunque

l'idea di questo carattere o di queste qualità è *inseparabile* dal concetto dell'essenza. Ecco l'*attributo*, ed ecco pure l'immutabilità perpetua d'un'essenza sia reale, sia possibile.

La differenza fra il *possibile* e l'*esistente* consiste, quanto a noi, nella differenza fra il *reale* e il *puramente immaginario*. Ma questo concetto non altera quello degli attributi essenziali degli oggetti. Dunque la differenza fra l'esistente e il possibile, lungi dal cangiare il concetto essenziale delle cose, anzi fa sì che l'uno serva, dirò così, di specchio all'altro.

5. Queste nozioni sono certissime, primitive e comuni a tutti gli oggetti dei nostri pensieri. La matematica dunque non può che ubbidire alle medesime. Impugnarle o tramutarle egli è pretendere che l'uomo abjuri il buon senso, o cangi le leggi del proprio intelletto. Ciò premesso, seguiamo. Ogni figura può essere considerata o *rispetto a se stessa*, o *rispetto ad altre*: considerata in se stessa, come far si può d'un astro solo in grembo al bujo assoluto, essa ci presenta l'idea d'un *esteso finito avente una data forma*. Questi sono attributi essenziali di lei. Domandare il perchè siano tali e non altri, è

lo stesso che domandare il perchè il bianco sia bianco, e il rosso sia rosso. Il vero e il fatto qui sono tutt' uno.

Non sono i *limiti* che facciano esistere lo spazio; ma è lo spazio *finito* che somministra l'idea dei limiti. La diversa *maniera* colla quale può esistere ossia figurarsi questo spazio, costituisce la forma o le varie forme che appellansi figure. L'idea della forma è *semplice, individua, immutabile* come quella di un odore, d'un sapore, del caldo e del freddo. Essa è attributo specifico ossia costituisce l'essenza particolare. Con ciò essa si qualifica, e si distingue la figura. Cercare concetti equivalenti è un assurdo, perchè sarebbe lo stesso che cercare di tramutare il sì in no.

Considerando una figura isolata reale noi ci immaginiamo che possa essere più *grande* o più *piccola*. Ma questo concetto è logicamente *relativo*, perchè coll'immaginazione si finge la stessa forma o più grande o più piccola. Se dunque nel grande o nel piccolo distinguesi il concetto *positivo* dal *comparativo*, ciò non nasce che dalla diversa maniera di paragonare. Nel positivo prescindiamo da qualunque paragone *speciale*, come quando diciamo un uomo grande o piccolo. Nel

comparativo ci riferiamo ad una data finita grandezza. La denominazione dunque *isolata* di grande o piccolo inchiude un paragone generico: la locuzione di *più grande* o *più piccolo* involge un paragone *specifico*. Qui sorgono le idee del *maggiore* o del *minore* rispettivo. Questo stesso può essere *determinato* o *indeterminato*.

Il concetto dunque che domina in tutte queste considerazioni, è sempre *relativo* e puramente relativo. Ma il relativo non può alterare in nulla i *caratteri specifici* degli oggetti: anzi il *relativo* è fondato tutto su questi caratteri, e risulta appunto essenzialmente dal paragone di questi caratteri. Dunque parlando delle figure e di ogni altro oggetto possibile, vale il detto, che il più e il meno non muta la specie. Ma se non muta la specie, dunque non muta nè le relazioni nè le affezioni nè le funzioni annesse ed essenziali alla sua specie.

Fu detto di sopra che il principio della figura è la stessa figura. Dunque il grande e il piccolo non potrà mutarne la specie, o snaturarne le funzioni. Immaginatevi pure un circolo, un' elisse, un quadrato, oppure qualche minima parte finita e figurata di ogni figura possibile. Le loro relazioni sa-

ranno le stesse, perchè la loro indole è immutabile. Voi potrete ampliarle ed anche dividerle mentalmente, come per ravvisar meglio una cosa lontana vi avvicinate, o per vedere una cosa minuta adoperate una lente o un microscopio. Ma ciò non altera punto il carattere specifico della figura o della quantità. Ciò è anzi impossibile come ognun sente. Dunque logicamente assurda sarebbe una dimostrazione la quale si fondasse sul supposto che il grande o il piccolo possa tramutare le funzioni logiche degli oggetti geometrici.

6. Ogni parte di spazio *finito*, ossia ogni estensione finita, esclude essenzialmente il concetto d'*infinito*. E pure sogliono i matematici parlare d'*infiniti*, e d'infiniti maggiori gli uni degli altri. Essi suppongono la divisibilità infinita dell'esteso finito. In questi discorsi qual è il concetto che illude? Il concetto che illude si è quello che nasce dall'accoppiare la nuda e fantastica possibilità dell'aggrandimento o impiccolimento dell'esteso collo stato positivo e coi rapporti determinati della misurazione o della divisione. Da ciò nasce il giudizio che l'idea dell'aumento o decremento metafisicamente possibile dell'estensione si possa accoppiare coll'opera-

zione della misurazione o della divisione. Ma questo giudizio, sebben addentro venga esaminato, si trova essere contro ragione. Eccone la prova. Egli è certo che l'estensione in genere si può in un senso astratto assoluto raffigurare indefinitamente suscettibile di aumento o decremento, ma egli è certo del pari che l'idea di un palmo è finita come quella di un dito, e che l'estensione finita d'un palmo è maggiore dell'estensione finita d'un dito. Ogni esteso reale è finito, e però i limiti dell'estensione esistente sono sempre determinati. Lo spazio infinito non è più una quantità perchè non è suscettibile di aumento o di decremento. Non di aumento perchè si figura infinito: non di decremento, perchè se fosse suscettibile di decremento, stando la sua natura d'infinito, sarebbe perciò suscettibile di gradi, nell'atto stesso che non sarebbe essenzialmente suscettibile di aumento. Così o cesserebbe la sua essenza logica o si dovrebbe ammettere un concetto contraddittorio. Da ciò ne viene che lo spazio infinito ed il punto inesteso si rassomigliano col non ammettere l'idea di *quantità*. L'idea dunque di *quantità* estesa sta fra le chimeriche idee del punto inesteso e dello spazio infinito. Il più e il

meno dunque non si può logicamente verificare, che nell'esteso finito e limitato.

Procediamo oltre. Ogni aumento o decremento di un esteso finito involge nel suo concetto un'addizione o sottrazione d'una porzione *estesa* finita. Questa porzione, qualunque siasi, è *positiva*. Questa porzione nella data ipotesi o aggiunge o sottrae una *parte rispettiva estesa*. Si avrà dunque sempre un residuo esteso e finito sia uguale, sia disuguale, sia aliquoto, sia non aliquoto. Se talvolta voi non potete ragguagliar il residuo colle prime porzioni che avete fatto, o pure non potete far coincidere un esteso col metro che avete assunto, ne viene mo la conseguenza della divisibilità infinita dell'esteso che avete sott'occhio? L'unica conseguenza legittima che ne viene, si è che voi non potete trovare una *coincidenza metrica* sia fra le porzioni separate e la residuale, sia fra il metro vostro e l'esteso misurato, e nulla più. Dedurre la conseguenza che l'esteso finito residuale sia infinitamente divisibile, egli è lo stesso che affermare ad un sol tratto che egli sia infinitamente esteso e sia nell'atto stesso suscettibile di aumento o di decremento, lo che è un assurdo manifestissimo. Allora lo spazio infinito sarebbe lo stesso

che un atomo esteso, ossia le due idee dello spazio infinito e dell'atomo sarebbero la stessa cosa. Allora anche quando avete una misura coincidente potreste dire che ogni dito ed ogni atomo è infinito, e quindi avreste infiniti maggiori, minori ed eguali ad altri infiniti. Ma a che ridurrebbesi allora la cosa? La cosa si risolverebbe a significare che l'infinità sarebbe propria dei maggiori, dei minori e degli eguali estesi finiti, e quindi posta in non cale questa qualità comune, rimarrebbe sempre la necessità di determinare l'aumento o il decremento rispettivo di questi estesi. L'infinita divisibilità pertanto, comune ad ogni esteso e ad ogni porzione di lui, rimarrebbe sempre una qualità puramente oziosa. Ridotta al suo vero valore, essa si risolve nel concetto proprio dell'esteso in quanto è suscettibile di ampliazione o di diminuzione, di addizione o di detrazione, e nulla più. L'idea della *suscettibilità* astratta dell'esteso di soffrire tutte queste alterazioni senza fissar limite alcuno, associata all'idea di varj estesi finiti, fa dunque nascere l'illusoria ed irragionevole idea di questi enti ad un sol tratto infiniti e finiti, maggiori gli uni degli altri.

7. Se voi raccoglierete l'attenzione sul

nostro intimo senso, voi troverete una conferma di queste osservazioni e v' accorgerete in che consista lo scambio logico dal quale nasce la vostra illusione. È di fatto che voi nel misurare gli estesi non fate uso del punto inesteso, ma adoperate l'esteso, ed agite sull'esteso. Ora sotto questo rapporto il moltiplicare e il dividere vale lo stesso. Voi dunque proseguite a dividere. Ma l'idea di una cosa estesa sta sempre avanti gli occhi vostri, perchè sempre agite su di lei. Per quanto dunque ripetiate questa operazione essa vi darà sempre lo stesso concetto. Egli è lo stesso come se diceste: io penso: io sento di pensare: io avverto di sentire di pensare: io sento di avvertire di sentire di pensare e così all'infinito. L'idea d'infinito sapete dove sta? Nella astratta idea della possibilità di *proseguir sempre* a ripetere la stessa cosa, e però non istà nell'oggetto *ma in voi*. Lo stesso avviene quando vi occupate a dividere l'estensione. L'indefinito in fatti si verifica sì nel grande come nel piccolo, perchè entrambi vi presentano sempre un esteso. Quindi voi avete sempre il motivo o di ripetere la misura o d'impiccolirla a piacere. Finchè dunque non fate cangiar natura all'idea di estensione, essa starà sempre pre-

sente al vostro intelletto, e produrrà in voi lo stesso concetto. Ma col farla crescere o diminuire non la distruggete. Dunque ripetendo senza fine la vostra operazione, e pensando di poterla ripetere senza fine, voi giudicate che la divisione o l'impiccolimento possano essere infiniti, e quindi che l'estensione sia infinita. Con questa maniera voi potreste dire anche un sapore, un odore, un suono infinito, perchè potete immaginare gradazioni senza fine. Ma il fatto sta che questa infinità non è che illusoria, ed altro non significa che un'idea non si può cangiar mai in un'altra.

8. E per verità sì il grande che il piccolo hanno un'essenza ed un'esistenza o reale o intellettuale. Ripugna logicamente che nello stesso punto siano o non siao. Ma quando dividete o impiccolite un oggetto lo supponete perciò stesso esistente co' suoi attributi essenziali. Dunque nella funzione della divisione, l'idea di esistenza interviene sempre nel vostro concetto. Ma quest'idea è immedesimata coll'idea dell'essenza, ossia cogli attributi qualificanti il soggetto. Dunque nella divisione dell'esteso interviene come indistruttibile l'idea dell'estensione.

Questa conseguenza è evidente al pari del

sentimento della nostra stessa esistenza, a meno che non convertiate l'idea di divisione, che indica parti *esistenti e sussistenti*, in quella di annientamento, che indica la negazione di ogni esistenza. Ora vi domando se il sì possa diventar no? È vero o no, che la divisione richiede un oggetto positivo, le parti del quale si vogliano separare? Dunque perciò stesso si suppongono parti esistenti e sussistenti. Ma se sono esistenti, e se le concepite esistenti, come potete voi risolverle nel nulla? Se parliamo di un tutto esteso, o che sia un aggregato, le parti non sono che *ripetizioni* dell'estensione. Allora figurate più estesi che compongono un esteso; ma separati, essi vi danno sempre l'idea d'una propria estensione, e voi siete sempre da capo. Allora abbandonate la divisione e ricorrete all'impiccolimento, e così accade una perpetua ripetizione di concetti come ho sopra annotato, e quindi pronunciate l'estensione infinita. Ecco il vero tenore dell'infinito dei matematici.

9. In qualunque concetto d'una grandezza o massima o minima noi associamo due idee che si confondono; la prima è quella di esistenza, la seconda è quella di estensione. Ma siccome all'estensione si accoppia il

più ed il meno, così ci figuriamo di poter dividere o impiccolire indefinitamente. Ma a questa maniera, come ho già detto, posso indefinitamente diminuire un suono e qualunque altra sensazione, e quindi dirle infinite, e però considerar me stesso, che tutte le provo, come un *Essere infinito*. Ma se per verità, come ho già dimostrato, tutto ciò non significa altro che l'impossibilità di cangiar l'essenza logica di una cosa e di convertire il sì in no, egli ne segue che l'infinito dei matematici è una mera illusione, anzi una vera e positiva assurdità logica. Non v'accorgete voi della contraddizione che voi stessi commettete, quando da una parte mi ponete avanti l'infinitamente grande, l'infinitamente piccolo, e dall'altra i punti e le linee inestese generatori dell'esteso? Se la divisione può essere infinita, dunque non si potrà finir mai coll'inesteso. E se l'esteso può incominciar coll'inesteso, dunque la divisione e l'impiccolimento non saranno punto infiniti.

Se volete io vi darò infiniti più meravigliosi. È di fatto che uno specchio ha la facoltà di riflettere l'immagine di tutti gli oggetti presentati. Ecco un infinito di riflessione. È di fatto che una palla ha la facoltà

di seguire tutti gli impulsi che gli vengono dati. Ecco un infinito di movimento. Questi attributi sono propj tanto d'uno specchio grande, quanto di un piccolo, tanto di una palla grossa, quanto di una minuta. Questi attributi dunque non sono annessi nè alla grandezza nè alla piccolezza, ma alla *natura intrinseca* della cosa, la quale finchè sussiste, darà sempre lo stesso effetto. Ecco una parità per l'estensione infinita dei matematici, e per qualunque altro simile concetto. Io lo ripeto, l'infinito non è nelle cose, ma nel concetto interno dello spirito, o per dir meglio non è in verun luogo, a meno che non vogliate erigere in oggetto infinito l'impossibilità di cangiare le essenze logiche coll'aggrandire o coll'impiccolire.

10. Dacchè dunque derivò che tanti uomini insigni adottarono con persuasione le idee di questi infiniti? — A me pare che debbasi attribuire a due cagioni influenti ad un sol tratto su i nostri giudizj. La prima consiste nel confondere l'idea dell'*aggregato materiale* che ci si presenta unito in un'idea sola, colla idea nuda dell'estensione, o almeno nell'associarle in modo, che l'una non vada disgiunta dall'altra. La seconda consiste nel dar corpo a tutti i nostri concetti della

quantità, e costituirne altrettanti oggetti reali dotati d'una positiva esistenza. E quand'anche non si empia il mondo di siffatte creature, si considerano almeno come *qualità reali*, ossia come idee corrispondenti a qualità reali esistenti nelle cose.

Ma se avessero pensato che la mente umana, sia che si alzi al firmamento, sia che scenda agli abissi, non esce mai da sè stessa, avrebbero conchiuso che l'universo non è che un fenomeno ideale presentatoci dai rapporti reali che passano fra lo spirito nostro e gli oggetti a noi incogniti esistenti fuori di noi. Allora avrebbero riguardate le idee tutte di spazio, di estensione ed altre simili come puri *segni naturali* corrispondenti a questi oggetti, e nulla più. Anzi avrebbero riguardate queste idee come segni secondarj e rimoti, perchè furono dedotte da noi col magistero dell'astrazione. Allora avrebbero distinto ciò che ci viene dal di fuori, da ciò che ricaviamo totalmente dal nostro fondo all'occasione delle idee che ci vengono dai sensi. Allora avrebbero veduto che tutte le essenze sono puramente logiche per noi; e che non possiamo nè potremo conoscere giammai che cosa siano le realtà degli esseri esistenti fuori di noi, e nè meno conoscere l'intima nostra realtà.

Quando la filosofia avrà acquistata quella finezza, quella certezza e quella ampiezza che la di lei natura richiede; quando eserciterà i suoi diritti su tutti gli oggetti che le appartengono, cesseranno anche quelle illusioni le quali predominano a proporzione che l'impero della fantasia prevale a quello della ragione. Allora svaniranno gli infinitamente grandi e gli infiniti piccoli. Allora non s'imbroglierà più lo spirito degli apprendenti con paradossi respinti dalla ragione. Allora non si dirà più a loro, ecco due parallele protratte indefinitamente; da un dato punto della parallela superiore tirate tante linee oblique alla parallela inferiore; l'angolo si andrà sempre diminuendo, ma non si raggiungerà mai la parallela superiore. Ecco quindi un infinito reale. Traducete questo discorso, e dite: lo spazio in forma di lista retta ed eguale non sarà mai simile allo spazio in forma di angolo; locchè si risolve nella proposizione che la lista non è angolo.

11. Fino a qui abbiamo esaminato un giuoco irragionevole di fantasia, o dirò meglio una inavvertenza nel non esplorare le alterazioni ideali nate nel passaggio che fa la mente dai concetti generali ed assoluti ai concetti speciali e relativi. Scusabile pare questa inav-

vertenza: ma che cosa direste voi quando vi venisse dimostrato che quegli istessi matematici che adottarono gli infiniti maggiori e minori degli altri, proposero nello stesso tempo l'idea di quantità più piccola di qualunque escogitabile? Svolgendo questa idea, non solamente essi distruggono gli infiniti suddetti, ma si abolisce perfino, senza bisogno, l'essenziale concetto della stessa quantità. E per verità quanto al bisogno io osservo che il calcolo non abbisogna dell'idea d'una quantità più piccola di qualunque escogitabile. Imperocchè il piccolo e il grande sono idee puramente relative, e non possono essere che relative. Ma per ciò stesso che le fate servire, sia per paragonare la grandezza di due o più oggetti, sia per segnare la rispettiva differenza, voi create un misuratore geometrico od aritmetico, mediante il quale intendete di scoprire l'identità o la diversità di quantità delle grandezze paragonate. Quando questo metro abbia soddisfatto a questo ufficio, l'intelletto non abbisogna di altro. Ora per soddisfare a questo ufficio non è necessario che questo metro sia una quantità più piccola di qualunque escogitabile, ma basta che sia tanto piccola da esprimere ogni valore che attribuite, o qualunque

differenza che segnar si deve nel dato processo. Dico nel dato processo e non in ogni processo immaginabile.

Voi mi direte che havvi la quantità continua incommensurabile, e che questa abbisogna di essere valutata. Ma qui vi domando se voi pretendiate col misurare di convertire il diverso essenziale in identico, e se ciò far si possa coll' assurdo concetto della quantità più piccola di qualunque escogitabile? Dico concetto assurdo, imperocchè una quantità più piccola di qualunque escogitabile significa realmente un'idea che sfugge alla percezione, e però un nulla logico. In secondo luogo poi è certo che quando ponete l'idea di quantità voi vi figurate una cosa suscettibile di aumento o di decremento. Questa condizione è così inseparabile dall'idea di quantità, che senza di essa si distrugge il suo concetto, come consta dalla sua definizione.

Questa condizione è anzi quella che determina l'essenza stessa della quantità. Dunque qualunque quantità è essenzialmente suscettibile d'impiccolimento. Dunque è metafisicamente impossibile il figurare una quantità più piccola di qualunque escogitabile. O conviene dunque abolire l'idea di quan-

tà, la quale nel suo essenzial concetto involge la possibilità di aumento o di decremento, o bisogna rigettare come assurda l'idea di una quantità più piccola di qualunque escogitabile.

Tutto questo è per sè evidente, nè potranno mai i matematici controverterne la verità. Ora domando se fra la quantità più piccola di qualunque escogitabile, e gli infinitamente piccoli usati o resuscitati nel calcolo passi una vera e logica differenza? Dove non si discerne nulla non si concepisce nulla. Ma così è, che nell'infinito non si discerne nulla, nè si prefinisce nulla; e specialmente si esclude l'idea di aumento o di decremento; dunque gli infinitamente piccoli suddetti sono equivalenti alle quantità più piccole di qualunque escogitabile. Dunque invano si potrebbe pretendere di riformare i fondamenti della matematica col far resuscitare o coll'impiegare questi piccoli infiniti, come ha fatto recentemente un trascendentalista del Nord.

12. Le nozioni speculative della matematica debbono necessariamente servire alle operazioni del calcolo. Ma il calcolo è un'arte; e quest'arte sarà più o meno illuminata a norma che le nozioni speculative saranno più

• meno adeguate. Nè il *meccanismo* nè l'*espressione materiale* distinguer debbono le specie diverse del calcolo delle quantità. Questa distinzione deve ripetersi dalla *natura dell'oggetto*, cui mediante il detto calcolo ci proponiamo di conseguire. Questa sentenza è fondata su di un principio logico, del quale si parlerà nel discorso quarto. Quest'oggetto non può consistere che in una data *cognizione* o in una data *opera*. Essa forma lo scopo: il calcolo ne forma il mezzo. Ma questo mezzo non riesce efficace se non si conoscono le affezioni particolari e le leggi delle quantità. Queste affezioni e queste leggi sono fondate sulla natura della quantità del numero. Dunque conviene formarsi un'idea esatta sì dell'una che dell'altro. Io non esibisco un Trattato di matematica ma sole osservazioni sull'insegnamento primitivo. Quindi dovrei omettere di parlar di proposito dell'indole intrinseca della quantità e del numero, e volentieri lo farei se anche qui non avessi a fronte autorità contrarie imponenti.

La quantità astratta può essere bensì concepita come qualunque altra idea semplice: ma non può essere definita. Noi anzi non possiamo nemmeno formarcene idea se non quando l'applichiamo a qualche soggetto

reale. Allora apparisce qual è veramente. Allora vediamo ch' essa non è che quel *modo di essere*, pel quale una cosa è suscettibile di aumento o di decremento. Il concetto della quantità racchiude in un sol punto quelli dell' *identità* e della *diversità*; per ciò stesso che racchiude le idee di *più* e di *meno*. Questa condizione è così essenziale, che senza di essa svanisce il concetto della quantità. Tutto ciò che non è suscettibile di *gradi*, non è suscettibile di quantità. La *verità*, la *certezza*, l'*esistenza* ed altre simili idee non ammettono gradi, e però non sono suscettibili di quantità. La verità primitiva ed assoluta altro non è che *un sì od un no immutabile*. La certezza consiste nell' affermazione o negazione di una cosa *escludente* il dubbio del contrario. Quando nell' affermazione o nella negazione entra il dubbio, nasce la *probabilità*, la quale ha tanti gradi, quanti ne ha il dubbio. Il dubbio assoluto esclude anche la probabilità perchè l' animo non propende nè per il sì nè per il no. La ragione sta in equilibrio perfetto e non giudica. Sente il peso, ma non propende da veruna parte. L'*imparzialità* logica assomiglia a quella d' una bilancia che regge pesi uguali. L' eguaglianza non ha gradi, e però anch' essa non è suscettibile di quantità. Lo stesso dicasi dell' equilibrio perfetto.

Il concetto *universale* della quantità si riferisce a tutte le cose suscettibili di più e di meno. Ma tutte le nostre sensazioni, tutte le nostre passioni, e molti altri modi nostri di essere o di agire sono suscettibili dell'idea del più e del meno. Dunque sono suscettibili dell'idea *amplissima* di quantità. Dico *amplissima*, perocchè nel comune linguaggio non si fa uso della parola *quantità* in tutti gli oggetti suscettibili di più e di meno. Non si dice, per esempio, quantità della bellezza, quantità dell'ingegno, e nè anche quantità di un odore, di un sapore, di un colore. Il concetto dunque proprio della quantità si restringe alle cose vestite, dirò così, di ESTENSIONE, sia che essa venga attribuita in senso diretto, sia che venga attribuita in un senso metaforico. A quest'ultima specie di quantità si restringe la sfera delle matematiche; e però essa forma il soggetto universale d'ogni specie di calcolo.

13. Finchè l'animo non pensa che all'unità isolata non può tessere calcolo veruno. Esso incomincia a calcolare quando pensa al numero. In generale il numero non è che *una pluralità compresa sotto di un sol concetto*. In questo senso il numero abbraccia anche le cose prive di estensione. Noi figuriamo al-

lora un aggregato sotto di un sol concetto. In conseguenza di ciò noi gli prestiamo implicitamente l'idea di un tutto esteso. Questa maniera di concepire dir si può *metaforica*, perchè presta ad una pluralità di cose non estese un concetto complessivo esteso. Senza un concetto unico *complessivo* non esiste l'idea del numero. Col ripetere sempre uno e poi uno, senza dir altro, non si forma un numero. Ma quando dico tre, quattro, cinque annunzio pluralità con un sol concetto. Questo concetto unico, preso per sè solo, costituisce la *grandezza numerica*. Il concetto di lei è così *positivo* ed *assoluto* come quello d' un esteso circolare, quadrato, triangolare o simile che mi venga posto avanti gli occhi. Io posso allora paragonare queste figure numeriche, le quali mi presentano una forma geometrica più spiritualizzata, e posso quindi trarne rapporti e risultati; ma questi rapporti e questi risultati sono *secondarij*, e realmente non sono che *verbi miei*, che io esprimo coi segni del calcolo. Essi dunque non costituiscono il *concetto* positivo del numero, ma la *logia* del numero.

Ciò posto, parmi che dir non si possa con Newton, che ogni numero non sia che un *rapporto*. Con questa definizione non si esprime

il concetto positivo del numero, ma solamente la *logia numerica*. La spiegazione stessa d'Alembert (1) parmi che possa giustificare la mia opinione. « Nous remarquerons d'abord
 « (egli dice) que un nombre, suivant la
 « définition de M. Newton, n'est proprement
 « qu'un rapport. Pour entendre ceci, il faut
 « remarquer que tout grandeur qu'on com-
 « pare à une autre, est ou plus petite, ou
 « plus grande, ou égale; qu'ainsi tout gran-
 « deur a un certain rapport avec une autre
 « à la quelle on la compare, c'est à dire
 « que elle y est contenue ou la contient
 « d'une certaine manière. Ce rapport ou
 « cette manière de contenir ou d'être con-
 « tenue est ce qu'on appelle nombre ».

Analizziamo questo passo.

In primo luogo qui si parla di *grandezze*, e di *grandezze* che possono *contenerne* delle altre come formanti i *termini* dai quali sorgono i rapporti. Qui dunque abbiamo in primo luogo il supposto di cose *estese*, le quali sono poste come fondamento positivo a questi rapporti. Dico il concetto di cose *estese*; perocchè la capacità di *contenere* o

(1) V. Enciclopedia, articolo *Arithmétique*.

di essere contenuto non si può applicare che a cose estese.

In secondo luogo si suppone che queste grandezze possano avere *dimensione* variata, poichè si suppone che possano essere rispettivamente maggiori, minori ed eguali, e in conseguenza somministrare i rapporti dei quali si parla. Qui dunque ci si presentano veri enti geometrici o simili ai geometrici, in vista dei quali sorge il numero.

Ma come si fa nascere il numero? Dal *paragone estrinseco* di queste persone. Qual è l'oggetto logico di questo paragone? Sapere quante volte una grandezza ne contiene un'altra, e come la contenga.

Posto tutto questo, si pone ogni grandezza a guisa d'una *unità staccata* dall'altra per rilevare soltanto il rapporto estrinseco suddetto. Il contenere o l'essere contenuto, qui non è che finzione, perocchè si suppone che ogni grandezza esista per sè, ed altro non esprime che il rapporto *commensurabile* dell'una coll'altra.

Ora ponderando questi concetti, che cosa risulta? Risulta che da una parte o si toglie o si dissimula il concetto proprio della grandezza, e dall'altra, che le idee di *ragione*, di *proporzione*, di *commensurabilità*, di *simi-*

glianza ecc. sono scambiate coll' idea propria del *numero*. Primo, si toglie o si dissimula il concetto proprio della grandezza. E per verità nel mondo matematico che cosa è una grandezza maggiore o minore di un' altra, fuorchè una quantità più o meno concreta? Il fondo, dirò così, della grandezza altro non è che la stessa quantità *finita*. Ora ditemi che cosa sia una quantità finita *maggiore o minore d' un' altra*? Se questo non è un numero *generico*, che cosa sarà desso?

In secondo luogo dico che qui scambiano le *logie* numeriche col concetto proprio del numero. Altro è che la mente nostra nell' esaminare un oggetto che chiamiamo grandezza faccia paragoni, pronunzii giudizj, dai quali emergono le idee *relative* suddette, ed altro è che queste idee relative costituiscano il concetto proprio del numero. Quando pronunzio tre, quattro e cinque non mi rompo la testa a paragonare nel modo voluto dal d' Alèmbert, ma mi figuro ad un tratto un tutto composto di tre, di quattro o di cinque elementi similari che chiamo unità e null' altro. Io entro in una camera dove veggo qua e là collocati molti frutti. Non comprendo a primo tratto quanti sian. Fin qui altro non concepisco che una indefinita plu-

ralità. Dico *indefinita* e non *illimitata*. Tale sarebbe quella mirando il firmamento sparso di stelle. Ma se raccolgo questi frutti e li conto ad uno ad uno, e che ogni volta che ne accresco uno, uso un segno diverso, nascerà l'*idea d' un aggregato* che esprimerò con una sola locuzione. Ecco allora la naturale idea del numero.

Questa idea è fatta qui per una *successiva apposizione*. Ma essa viene somministrata anche in una maniera più immediata colla *divisione* di un tutto in date parti. La mia mano è il primo modello che mi offre questa idea. Volendola semplificare ancor di più, piglio, per esempio, un quadrato, o un altro tutto uniforme, e lo divido in parti aliquote. Allora esprimo un tutto distinto in parti similari, ed ecco di nuovo il numero. Esso dunque comparisce sempre come una *pluralità espressa* con un solo concetto.

14. Questo concetto complessivo è quello che costituisce appunto la grandezza. E siccome la pluralità è maggiore o minore, così la grandezza riesce maggiore o minore. L'espressione numerica delle *parti* della grandezza può essere varia, ma ciò non altera il suo rapporto *estrinseco* con un'altra grandezza. Io posso dividere la stessa area e

posso lasciarla senza divisione alcuna. Nel primo caso avrò una valutata grandezza, nel secondo ne avrò una non valutata. È vero che paragonando una grandezza totale minore con una maggiore potrò figurarmi che stia tante volte nella maggiore; ma in questo caso io figuro la grandezza minore, come *parte* della maggiore; e così se può capirvi molte volte senza che avanzi nulla, diventa *parte aliquota* della maggiore. Ma in questo caso che fo io? Io fo un' *immaginaria divisione* del corpo della maggiore mediante l'applicazione della minore, e fo nascere il numero. Ma io posso far lo stesso dividendo questo corpo direttamente in tante parti eguali alla grandezza minore la quale in questo caso fa la funzione di *unità metrica* e nulla più. Il numero però consisterà nel *complesso di queste unità* nelle quali è ripartito il corpo della grandezza maggiore, e non nel *rapporto univoco primitivo* ed estrinseco fra le due grandezze. In questi esempi il concetto proprio del numero apparisce coperto dalle spoglie sensibili dell'estensione. Ma per verità esso predomina anche scevro da queste spoglie. Così, per esempio, come nominiamo tre globi, così pure nominiamo tre suoni, tre colori, tre

odori, tre sapori, tre pensieri, tre esistenze ecc. ecc. Il numero dunque non indica che pluralità di concetti abbracciati con una sola considerazione.

Se più oltre spingiamo la nostra attenzione, noi sotto l'idea del numero vediamo trasparire quella legge suprema ed ultima dell'animo nostro, colla quale nel mentre che distinguiamo le diverse nostre idee noi le riuniamo in un sol concetto complessivo: e quindi ravvisiamo sempre il tipo di quell'io unico che ad un sol tratto sente e distingue, e che nel sentire e nel distinguere riunisce i suoi modi di essere in un unico centro, cioè nell'unica facoltà sua di sentire. La pretesa dualità annunciata da un trascendentalista del nord non contiene la legge suprema che veramente presiede al calcolo, ma altro non esprime che l'atto puro di *distinguere*, e però non esprime che una *parte sola* di questa legge. Difatti quando dico uno più due fa tre, oppure in generale a più b fa c , io formo un numero. Ma qui realmente ho due idee concorrenti, ed una concludente, due termini coefficienti, ed uno risultante. Ma l'idea di questo termine risultante è una terza idea così semplice, così unica e così propria, che non si può con-

fondere colle altre due. Più ancora; senza questa terza idea non esiste il numero nè verun risultato da me ricercato. Con questa terza idea poi io unifico così le cose che dimenticar posso i coefficienti ed avere ciò non ostante il concetto domandato. Non è dunque sotto forma di dualità ma di trinità individua che *la legge suprema di ogni algoritmo* può essere presentata.

15. Tutte queste discussioni servono di saggio per provare il bisogno di purgare la matematica dai concetti illusori e lambiccati coi quali a dispetto della buona filosofia si è voluto svisarla. Le prime nozioni son quelle che abbiamo esaminato. Ora qual maraviglia se tanto penoso, tanto lungo, tanto tortuoso, tanto sconnesso riesce il cammino della scienza intiera? Svestiamoci una volta da queste illusorie e mal tessute spoglie trascendentali, le quali, oltre di guastare i veri concetti logici, gettano nelle nostre scoperte e nelle nostre dottrine una durezza, una fatica, un gelo ed oso dire una violenza ributtata dalla natura.

Io non pretendo con ciò che le idee astratte e generali debbano essere bandite dalla matematica, ma pretendo che debbano essere banditi que' fantasmi che usurparono

il loro posto. Togliere le idee astratte e generali, egli è lo stesso che ridurre l'uomo alla condizione delle bestie. Ma altra cosa sono le idee astratte e generali, ed altro le sfumature illusorie partorite dall'ignoranza o da giudizi precipitati. Le vere idee astratte e generali non ammettono nè quiddità scolastiche nè analogie volgari che si perdono nelle nuvole; ma esse si restringono all'espressione eminente dei *fatti* reali raccolti con diligenza, esaminati con ordine ed interpretati con sagacità.

Queste genuine idee astratte e generali debbono dar forma e somministrarci i veri concetti e la fedele espressione degli enti matematici. Ma esse non possono compiere quest'ufficio finchè noi non interniamo le nostre ricerche sul *modo* col quale essi naturalmente si *generano* ed agiscono anche all'insaputa nostra. Questa ricerca esigerebbe un lavoro fatto di proposito, del quale manchiamo ancora. Qui io mi restringerò ad accennare solamente quel tanto che parmi necessario per fondare il miglior metodo dell'insegnamento primitivo.

16. Il calcolo è opera tutta nostra. Esso in sostanza riducesi all'espressione artificiale delle leggi necessarie che dettano i nostri

giudizj nel paragonare le quantità. Questi giudizj risultano dalla combinazione di date idee. Convien dunque conoscere tanto l'*indole* di queste idee, quanto le leggi naturali del nostro intendimento allorchè si occupa su di esse. Ciò posto, io avverto che se con un concentrato raccoglimento interroghiamo il nostro senso interno, noi travediamo che in tutte le operazioni matematiche intervengono due specie di concetti sempre associati. Il primo lo chiamo *aritmetico* ed il secondo *geometrico*. In àstratto si possono confondere, perchè il *misurare* riducesi in fine ad una enumerazioni di parti espressa con una o più proposizione, ma esaminando più addentro la natura loro noi ci avvegiamo essere eglino diversi. I concetti dell'unità elementate e del numero me ne somministrano una prima prova. Che cosa è veramente l'*uno aritmetico*, o a dir meglio a che cosa riferiamo noi l'unità aritmetica? È chiaro che noi la riferiamo alla sola idea di *esistenza*. L'uno dunque aritmetico è segno d'una esistenza e nulla più. L'uno geometrico per lo contrario indica una data porzione di spazio ossia una data estensione finita. Da ciò ne viene che il numero aritmetico è tutto *metafisico*. Il geometrico all'opposto è

tutto fisico. Col numero aritmetico indico tanti uomini, tanti alberi, tanti animali ecc. ecc., nulla importando se siano grandi o piccoli, simili o dissimili. È dunque manifesto che nella semplice *enumerazione* non si considera che la *nuda esistenza*. Ma dall'altra parte l'idea di esistenza è per se semplice ed indivisibile. Dunque ne viene che l'elemento primo e perpetuo della nuda enumerazione è essenzialmente semplice ed indivisibile.

La cosa non procede così nella *divisione*, e meno poi negli altri rami del calcolo. Ivi anche non volendo s'introduce l'uno geometrico. Ivi noi non vediamo e non possiamo veder che lui, ed agire che su di lui. In esso concorre bensì l'idea astratta di esistenza, ma essa non è la sola che ne costituisca il concetto. Questo concetto è precipuamente formato dall'idea d'una estensione distinta e finita. Ma perciò stesso che è finita, è anche figurata. Queste due condizioni sono per noi inseparabili. Quando parliamo in particolare, la nostra immaginazione si ferma sulla idea della data figura. Quando poi parliamo in generale, si sveglia una confusa idea o di una o di molte corrispondenti ai nomi che impieghiamo. I vocaboli generici di *figura*, di *potenza*, di

termine, di più, di meno e simili non possono svegliare in noi altre idee che queste, altrimenti sono vuoti di senso per noi. Tutte le nostre idee generali si presentano nella stessa guisa: e a norma delle parole che impieghiamo si risvegliano nella stessa maniera.

Allorchè ci occupiamo sull'esteso col *sensu aritmetico*, non poniamo mente nè alla forma nè alla collocazione delle superficie, ma altro non facciamo che numerarne le parti ed annunziarne la somma. Colla *valutazione* difatti noi prescindiamo da queste circostanze in modo che diciamo *equivalenti* tutte quelle superficie variamente conformate le quali somministrano lo stesso numero di parti aliquote. Parimenti diciamo *commensurabili* quelle nelle quali una parte aliquota dell'una può essere parte aliquota dell'altra. Quando questa equivalenza e questa commensurabilità non appariscono a primo tratto, si rende necessario di rintracciarle sotto le varie forme nelle quali stanno nascoste. Ecco la necessità dell'analisi, del calcolo e delle dimostrazioni.

In tutto questo però il *sensu aritmetico* non fa che misurare per ritrovare o l'eguaglianza o la disuguaglianza senza specificare giammai sotto qual *forma* appaisca

l'esteso. In ultima analisi dunque col senso aritmetico noi ci restringiamo a *limitare* più o meno l'esteso, stante che coll'annoverarne le parti altro non si fa che annunziare limiti più o meno ampii, o più o meno ristretti. Misurare è lo stesso che far coincidere un dato esteso con un altro. Ma siccome la possibilità di questa coincidenza dipende dalla *natura propria* degli estesi paragonati; così la possibilità della commensurabilità risulterà da questa stessa loro natura. Il senso aritmetico dunque non potrà trovar limiti coincidenti se non quando il concetto degli estesi sia conformato in un modo *analogo* a queste coincidenze. L'affare dunque riducesi ad un *fatto primitivo* simile a quello di qualunque altra sensazione. Due suoni, due colori, due odori diversi non si possono identificare; così pure due quantità o forme estese *primitive* realmente *dissimili* non si possono far coincidere entro gli stessi limiti.

La matematica non crea nulla dentro di noi ma contempla il creato ed agisce sul creato. Quindi le locuzioni sue non possono avere un significato diverso da quello che si presenta in tutte le altre nostre situazioni. Il dizionario matematico non può essere di-

verso dal psicologico. La matematica quindi non può avere nomi assolutamente *tecnici* come le arti ed i mestieri.

Esaminando il modo col quale la mente umana sale alla *enumerazione*, si trova ch'ella è debitrice al tatto, e quindi alla vista associata al tatto, di questa sua possanza. Da ciò ne viene che l'uno aritmetico si trova naturalmente associato al geometrico. Per una decomposizione ultima delle idee che formano il concetto dell'uno geometrico, voi separate l'idea di nuda esistenza, e la vestite di un segno, e così formate l'uno aritmetico. Il punto matematico è il simbolo intellettuale di quest'ultima astrazione.

Ma per quanti sforzi possiamo fare, non giungiamo mai a scompagnare il senso, dirò così, geometrico dall'aritmetico, e però ne viene che parliamo di *grandezze* in aritmetica, e di *non estesi* in geometria. Ma la natura parla più alto di noi; e però sortendo dall'astrazione dell'uno isolato, e venendo al numero, siamo senza avvedercene trascinati ad associare e far valere il senso aritmetico unito al geometrico. Così si formano grandezze aritmetiche come si formano grandezze geometriche. Così si parla di numeri quadrati, di cubici, di triangolari, di pirami-

dali, e perfino di circolari; come viceversa si parla di superficie o di potenze lineari, duple, triple, quadruple, e così del resto. Ma tostochè formate *grandezze* aritmetiche come *grandezze* geometriche, voi togliete all'uno aritmetico l'*indivisibilità* che gli prestate, e sostituite un *indefinito dimensiono* che in sostanza coincide coll'uno geometrico. Allora, secondo le funzioni che voi esercitate, egli prende gli aspetti ora di elemento, ora di un tutto, ora di misuratore, ora di misurato, ora di componente, ora di dividente, ora di complessivo, ora di segregato ecc. ecc. Nè la cosa può accadere diversamente perchè l'*io* che pensa, che distingue, che paragona, che disgiunge, che connette, è *uno*; e tutti questi concetti non sono che l'*io stesso* il quale esiste ora in una ed ora in un'altra delle maniere suddette.

Niun uomo di buon senso, e meno poi niun matematico potrebbe negarmi che il concetto dell'unità non sia intrinsecamente quale io lo presento. Imperocchè io gli opporrei due fatti solenni palmari e perpetui, il primo de' quali si è quello delle frazioni; il secondo quello del calcolo di approssimazione. Se noi facessimo uso d'un elemento primo indivisibile, come dividerlo si po-

trebbe in metà, in terzi, in quarti, e così all'infinito? Se tutti gli enti matematici si dovessero considerare come puri aggregati di questi elementi primi ed indivisibili, come potrebbero esistere veri incommensurabili; e quindi essere necessario il calcolo di approssimazione? Voi giungereste in ultimo all'uno differenziale, come fate, per esempio, nei numeri dispari. Ma qui qual partito prendere? Se voi dividete l'unità, voi da una parte cadete in contraddizione con voi stesso perchè le togliete l'indivisibilità, e dall'altra voi cadete in un circolo vizioso, stantechè allora la divisione si risolve in una moltiplicazione. Allora la vostra approssimazione si converte in un maggiore allontanamento, e però siete costretto a tornare alla prima posizione integrale. Ma alla perfine perchè fate tutto questo? Pretendete forse che il *diverso* diventi *identico* o viceversa? Non v'accorgete voi che l'idea di unità investe *tutto* il vostro soggetto, e che però quando siete all'ultimo è lo stesso come se foste al principio? Accordo dunque anch'io che esista l'unità *indivisibile*, ma io non la fo consistere nell'uno sgranato ed elementare dei matematici, ma in tutt'altro. Questa verità appunto risulta dimostrata dal supposto im-

plicito che suggerì il calcolo stesso di approssimazione. Io accenno tutto questo per dimostrare che la forza della natura è tale che si manifesta in outa dei tentativi dei punti inestesi, delle linee inestese, degli infiniti indeterminati ecc. ecc.

17. Taluno forse obbiettar mi potrebbe che io voglio introdurre il *materialismo* nelle matematiche. A questo obbietto risponderei che, ben lungi che questa taccia convenga a me, io la posso ritorcere contro la matematica corrente. Io difatti non pretendo di polverizzare l'unità, ma la mantengo come sta. Se essa mi si presenta colle divise dell'esteso, io non la considero perciò divisibile che per finzione. La *materialità* non istà nell'idea di estensione, ma nel concetto di molte parti esistenti e sussistenti aggregate sotto la forma di un tutto. In breve, la materialità sta nella *pluralità delle sostanze* e non nella idea dell'estensione. Supponete, per esempio, che uno spirito al di fuori agisse sul mio corpo come la mia anima agisce al di dentro; io lo vedrei sotto forme sensibili, benchè fosse uno. L'unità di sostanza essenzialmente esclude la pluralità. L'unità di sostanza è dunque l'opposto della materialità. L'unità importa essenzialmente semplicità, indivisibilità ecc. ecc.

Un aggregato finito è un numero *finito*, ed essendo finito non può più estendersi all'infinito. Ma l'esteso, secondo i matematici, si può o dividere o impiccolire all'infinito. Dunque anch'essi sono costretti a confessare che il concetto dell'estensione non è la stessa cosa del concetto dell'aggregato di più sostanze. L'idea di estensione è così semplice, così individua, così nostra, come qualunque altra idea o senso interno che proviamo.

Quest'idea ha la proprietà di poter sopra le altre tutte accoppiare in un sol concetto l'unità, la varietà, la gradazione, talchè per questa sua virtù ella serve di materia e di criterio al calcolo. Quando pensate che più unità si congiungano a formare un tutto, voi create un numero. Se voi lo paragonate con un altro tutto, e pensate che possa essere maggiore, minore o eguale a questo tutto, voi create una *grandezza*. Il nome di grandezza è dunque puramente *relativo e comparativo*. Il concetto *positivo* ed assoluto della cosa detta grande o piccola *sussiste per sé*. Esso anzi forma il termine di paragone; e però è logicamente *anteriore* al concetto della grandezza.

Il nome di grandezza si suole assumere ora come indicante un oggetto positivo do-

tato di quantità, ed ora come indicante il rapporto solo quantitativo dell'oggetto stesso sia con altri enti, sia collo stato diverso d'aumento o di decremento nel quale può essere figurato. Il concetto della grandezza ora è *indeterminato* come quello appunto di maggiore, minore ed eguale: ora è *determinato* come quello di duplo, triplo, quadruplo ec. Il determinato può rivestire due aspetti, l'uno *continuo* come appunto quello di duplo, triplo, e l'altro *discreto* come quello di 16. 17. 20 ecc.

Le altre idee di *simiglianza*, di *ragione*, di *proporzione*, di *commensurabilità* ecc. ecc., formano un ordine *consequente* di altre logie.

18. Tocca alla matematica il ben definirle e di mostrarne la figliazione. Considerando una quantità chiamata grandezza, dicesi *commensurabile* o *no*. Con ciò si esprime ch' essa è suscettibile o non suscettibile di *coincidenza metrica* con un'altra. Con ciò non si altera punto la di lei natura, perocchè questa è una relazione estrinseca ed accidentale, e non un attributo perpetuo ed essenziale della grandezza.

Qui solamente annoterò che tutti questi rapporti possono coesistere stando gli stessi enti *positivi*. Mi spiego con un esempio. Voi

dite in geometria che il quadrato dell'ipotenusa è eguale alla somma dei quadrati dei due cateti, ossia che la di lui area pareggia quella dei due quadrati suddetti, talchè questi si possono sempre risolvere in due parti di quello dell'ipotenusa. Con questa proposizione generale voi realmente esprime un' unità ed una grandezza indefinita, stantechè la proposizione si verifica, sia che poniate i cateti eguali, sia che li poniate disuguali. Li ponete voi *uguali*? Allora il quadrato dell'ipotenusa ha una grandezza doppia di quella del quadrato di ogni cateto. Li ponete voi *disuguali*? Voi non avete alcun termine di paragone finchè non discendete a concretare la disuguaglianza. L'eguaglianza non ammette che una posizione sola. Essa esprime *identità* di quantità fra due o più soggetti.

Supposti i cateti disuguali, fingiamo che il quadrato di uno sia doppio di quello dell'altro: allora quello dell'ipotenusa diventa triplo rispetto al primo; rispetto poi al secondo sta come tre a due. Allora adunque l'unità del quadrato dell'ipotenusa sostiene ad un tempo stesso un doppio rapporto, diverso affatto da quello della posizione dell'eguaglianza in cui prima lo figuraste. Que-

ati rapporti poi di disuguaglianza si possono indefinitamente variare, e ciò non ostante verificarsi sempre, che il quadrato dell'ipotenusa è eguale a quelli dei cateti. Quali sono le conseguenze di quest'osservazione? La prima si è che tutti questi rapporti o simultanei o successivi sono *estrinseci* al positivo concetto delle superficie; e propriamente non sono che *verbi nostri* dedotti dalla posizione rispettiva delle superficie paragonate. La seconda si è che il quadrato dell'ipotenusa fa la funzione di un' *indefinita e stabile unità*, la quale nell'atto che serve di fondamento agli indefiniti rapporti di proporzione che nascono dal rispettivo aumento o decremento dei cateti, riesce sempre eguale alla somma delle aree, dei quadrati, dei cateti medesimi. La terza conseguenza poi si è che la nostra mente nel formare i verbi suddetti non si contenta del solo aspetto della figura che ha sott'occhio, ma fa intervenire altri enti matematici per formare le rispettive proposizioni.

19. Questa terza operazione si fa quasi a nostra insaputa, e però nell'atto che noi crediamo di non esaminare e paragonare fuorchè la figura sensibile che ci sta avanti, noi effettivamente chiamiamo a paragone *altri enti*

matematici. Un esempio chiarirà questa osservazione. Fingete un vaso pieno d'acqua. Io distribuir posso quest'acqua in altri due vasi o di pari o di dispari grandezza. Ma la massa dell'acqua è sempre la stessa, e la capacità del vaso che la contiene, è sempre la stessa. Questa idea di *identità* di quantità è positiva. Ma quest'idea non risulta dall'aspetto sensibile dei vasi nè delle masse esistenti dell'acqua, perchè tutto può essere disuguale. Quest'idea dunque è posta in mezzo dal mio solo intelletto. Procediamo oltre. Quando paragono le masse dei due o più vasi minori, sia fra di loro, sia col vaso maggiore, che cosa avviene? Egli avviene in primo luogo che le dette masse sono da me raffigurate come soggetti per sè esistenti, e quindi come tante *unità* alle quali io non posso nè aggiungere nè detrar nulla senza distruggerne il concetto. Egli avviene in secondo luogo, che quando ne determino la *differenza*, io figuro *altre misure positive* di acqua eguali a queste differenze. Quando poi concludo per l'eguaglianza col vaso maggiore, io figuro queste masse in grembo, dirò così, allo stesso, e come occupanti una data parte dello stesso. Ora fingiamo che io voglia esprimere la mia operazione esatta-

mente. Che cosa ne risulterà? Egli ne risulterà che dovrò non solamente esprimere il valor assoluto delle masse dell'acqua, ma eziandio sì la loro differenza assoluta, che la loro differenza media, ossia la loro distanza dall'eguaglianza. Con questa espressione è chiaro che anche gli enti creati da me per formare il calcolo entrano nel computo, e diventano termini dello stesso come le masse reali dell'acqua. Anzi queste masse reali non venendo considerate che come pure *quantità*, sono, dirò così, spiritualizzate, ed acquistano così l'espressione intellettuale dei rapporti da me rilevati. Queste masse immaginarie non si possono altrimenti confondere con questi *rapporti*, come non si può confondere l'oncia, il grano ed il carato che si pongono nel catino della bilancia per pesare un grave, colle avvertenze e le prove che fa colui che cerca di determinare questo peso. Se ora aggiunge, ora leva finchè trova l'equilibrio, ciò egli fa certamente in *vista* dei *rapporti* di approssimazione maggiore o minore ch'egli va scoprendo; ma le oncie, i denari, o i carati non sono rapporti, ma materia positiva. Le diverse *quantità* di questa materia rappresentano nei varj casi una *forza* di gravità eguale o disuguale a quella della

materia pesata. Queste operazioni si verificano, sia che si tratti di determinare le differenze, sia che si tratti di formare un' altra grandezza, o di fissare il luogo in cui nasce o in cui finisce ecc.

20. Questo non è ancor tutto. Nel paragonare le misure suddette di acqua, io uso certamente di una misura determinata. Ma ognun sa che questa deve necessariamente variare a norma del rapporto che le masse sostengono colla massa intiera, della quale esse sono parti integranti. Qui dunque si presentano due *specie di unità*. La prima è quella di tutta la massa, la seconda è quella che mi serve a determinare i rapporti eventuali tanto fra parte e parte, quanto fra le parti e il tutto. Questa seconda unità io l'appello *unità metrica*, o *uno metrico*. Egli è notorio che egli non può essere che *rispettivo* e particolare e nulla più. L' uno metrico dunque *generale* non esiste nè può esistere. Dico anche, che non può esistere, imperocchè se potesse esistere, non potrebbero esistere nè veri incommensurabili nè vere unità complessive: ma altro non esisterebbero che aggregati o coacervazioni indefinite. L' uno metrico dunque, preso come misuratore delle grandezze, si deve considerare come un divisore precario d' una inesauribile unità.

21. Il concetto di questa unità appartiene al *sensu integrale* assai più esteso del differenziale. Difatti noi sentiamo assai di più di quello che possiamo discernere. Testimonio ne siano que' passaggi da noi detti insensibili; i quali, sebbene facciano una reale e successiva impressione nel nostro occhio, ciò non ostante non si possono partitamente discernere per il minimo spazio che percorrono. Testimonio ne siano ancora le moltissime affezioni, delle quali non possiamo presentare l'espressione, e che pure sono parторite da idee, ossia da impressioni distinte fatte in noi. Quello che nelle belle arti o in letteratura appellasi *gusto*, appartiene più al *sensu integrale* che al differenziale. Con questo senso, senza saperlo, formiamo quell'*unità complessa* che sfugge ogni calcolo. Con esso anche l'uomo di genio riceve quelle subitanee ispirazioni, le quali sono indipendenti dall'analisi e dal sillogismo. A questo appartiene pure quello che appellasi *tatto morale* o di esperienza tanto nei giudizi, quanto negli usi della vita.

Questo senso riceve maggior perfezione quando ad un felice organismo si accoppia una buona educazione. Egli opera in noi in ogni istante della vita; e quindi in tutte le

nostre meditazioni. In esse i concetti che cadono sotto il discernimento, sono parti dei concetti integrali segnate a più o meno larghi intervalli.

Mediante poi il *sensu differenziale*, l'*intelligenza nostra avvertitamente* comunica da una parte colla natura, e dall'altra coi nostri simili e con noi medesimi. Difatti la mia mente non può avvertitamente comunicare nè con me nè con altri se non mediante quelle cose che discerno, e que' sentimenti de' quali posso dar ragione a me stesso. Ma tutte le scienze, le regole, le dottrine, le ordinazioni umane derivano dal discernimento; dunque esse non potranno raggiungere giammai le gradazioni tutte nè esaurire il fondo, dirò così, del senso integrale. I dettami dunque scientifici particolari si possono rassomigliare a quelle colonnette che si pongono lungo una strada. Esse segnando a larghi intervalli il cammino; ma lo spazio di mezzo è lasciato senza indicazione.

Ma s'egli è vero che dove non si discerne più, non si può paragonare, perchè dove non si discerne più non si sente differenza, malgrado pure che esista e faccia la sua minima impressione; sarà pur vero che al di là di certi limiti deve accadere nei nostri concetti

una *trasformazione* per la quale la scienza deve cessare o cangiar linguaggio, ossia cangiare l'espressione dei concetti. Ridotte di fatti le cose a questa estremità, le opposizioni si convertono in distinzioni, e le differenze in gradazioni.

22. Nè la cosa può procedere altrimenti, perocchè l'identità e la diversità non esprimono veramente che due modi di sentire dell'animo nostro, *associati* a qualsiasi specie d'idee presentate a noi in una *guisa risaltante*. In qualunque stato si trovi o si finga l'animo nostro, sia che si trovi unito ad un corpo con sensi o maggiori o minori, sia che abbia idee senza l'intervento dei sensi esterni, si verificherebbe sempre questo carattere.

Le idee *ontologiche* tutte sono di questa natura. Esse, parlando propriamente, non ci vengono di fuori. Le cose particolari hanno forme *assolute* e particolari. Espresse in generale non cangiano natura. Le idee *ontologiche* non esprimono forme, ma pure *logie*. Esse quindi non appartengono all'esterno, ma si riferiscono solamente a funzioni fondamentali ed ultime dell'animo nostro, le quali intervengono perpetuamente nel sentire e concepire qualsiasi cosa. Così nello specchio, dopo le diversità delle immagini,

trovate che tutte sono riflettute : ma la riflessione è la funzione fondamentale dello specchio e non degli oggetti.

Le idee matematiche sono, fra tutte, le più contigue alle ontologiche, e per un certo lato si confondono colle ontologiche. Questo fa sì che la sfera delle matematiche ha un aspetto per noi immenso e a prima giunta uniforme. Ma s'egli è vero che l'intelligenza nostra è limitata; se ella ha certe leggi, se ognuno di noi è conformato d'una sola maniera, e se l'*io* che sente le differenze in un oggetto materiale, è quello stesso *io* che le sente in un oggetto intellettuale, sarà pur vero che una sola legge dovrà presiedere a questo sentimento. Que' simboli segnati con un nome che chiamiamo idee astratte, intellettuali, generali, non possono mutare la nostra capacità nè sottrarci da questa legge. Quelle che i matematici chiamano proprietà dei numeri saranno dunque effetto di questa legge. Il numero non esiste in natura, ma egli è un concetto del nostro spirito.

23. Quanto poi al raffigurarli, noi non abbiamo altro mezzo che quello di un senso distinto, risaltante, e che abbia, dirò così, una certa latitudine. Un rapidissimo ed un lentissimo movimento si rassomigliano. Pare dunque

che la numerazione distinta esteriore richiegga una certa vibrazione dei nostri organi. Se l'aspetto o la successione delle cose esterne eccita quella vibrazione con quel dato intervallo, nasce la distinzione. Se non eccita a quel segno, con quella tale *latitudine* e con quelle tali *pause*, non si ottiene verun concetto particolare distinto.

Le produzioni, specialmente organiche conosciute, ci presentano specie distinte nelle quali colla varietà particolare della loro struttura veggiamo accoppiata una similarità di leggi e di azioni compatibile colla costituzione organica di ogni specie. I germi racchiudono sicuramente le prime cause determinanti di queste forme e di queste leggi. Se il nostro sensorio fosse conformato in guisa di un germe o in altra simile forma, che cosa ne dovrebbe nascere? Una psicologia sagace e ben corredata di fatti potrebbe recar qualche luce in questi reconditi recessi del nostro essere. Ciò servirebbe di guida a spiegare in progresso molti fenomeni sentimentali che in oggi ci appaiono isolati e che ci presentano la dottrina dell'uomo interiore a guisa di una raccolta di viaggi di molti navigatori, i quali hanno bordeggiato le sole coste, o non si sono internati

abbastanza nel paese per darcene una carta specificata e complessiva.

Se la matematica fosse trattata a dovere, essa dovrebbe somministrarci la prima interpretazione delle leggi del senso differenziale unito all' integrale; perocchè nella semplicità delle idee che maneggia, queste leggi operanti contemporaneamente si debbono mostrare alla scoperta. Noi avremmo allora la storia naturale dell' animo umano il quale ad un sol tratto sente e distingue; perocchè la denominazione di senso integrale e differenziale non è che una locuzione per dar ad intendere la natura di due funzioni e modi di essere dell' animo nostro. Io trovo, per esempio, che in architettura si assegnano certe proporzioni; che della musica si danno certi elementi coi numeri. Ora domando se siasi ridotta la teoria ad una tale unità sistematica e primitiva da mostrare la radice comune di fatto delle regole architettoniche e musicali? E pure questa radice comune esiste. Essa riposar deve su un fatto primitivo o su alcuni *fatti* primitivi dei quali se non possiamo trovar altra ragione, basta che constino a noi per servir di fondamento alle nostre dottrine. Dicesi, per esempio, nella musica che le ottave si rassomigliano; e si

considerano nei loro rapporti come una stessa voce. Si è mai filosoficamente analizzato questo concetto? Le voci non hanno nè figura nè colore : come dunque trovate voi fra il grave e l' acuto che sono due idee diverse, una *identità* come questa? Qui avete identità e diversità in un punto solo : mi sapreste voi dare un emblema che rassomigliasse e mi desse ragione di questo fenomeno psicologico?

Alla matematica pienamente sviluppata toccherebbe di offrire questo emblema. E quando fosse convenientemente esposta presenterebbe all' umana intelligenza uno specchio nel quale questa ravviserebbe se stessa ed i propri movimenti, allorchè si occupa a studiare le quantità. Essa vedrebbe allora, che i concetti aritmetici appartengono propriamente al senso *differenziale*, e che perciò debbono essere più semplici e più universali dei geometrici, e servir quindi ai paragoni ed ai risultati geometrici. Difatti quando la mente nostra semplicemente *distingue* o *limita* un oggetto, non ritrae altro concetto che quello d' una diversità o di una latitudine astratta, la quale non si può risolvere in veruna altra più semplice idea. Da ciò ne viene che col senso aritmetico voi determinate anche le misure

di quelle cose, le quali non presentano superficie alcuna. In questi casi però il senso aritmetico viene assistito dal geometrico. Così ci serviamo dello spazio per misurare il moto; e dello spazio e del moto per misurare il tempo. Così se noi ci occupiamo a determinare la caduta, la proiezione, la direzione o diretta o ribattuta di un solido o di un fluido, l'immaginazione traccia per una pronta finzione la linea che essi descrivono. Quanto alle forze, si associano le idee dell'estensione e dei numeri per segnare i gradi, talchè quest'associazione del senso geometrico coll'aritmetico è costante, universale, inseparabile.

Nè la cosa, logicamente parlando, potrebbe mai procedere diversamente; perocchè le idee di *diversità*, di *distinzione*, di *limiti*, di *più*, di *meno* ecc., sono tutte puramente *relative*. Ma per ciò stesso che sono *relative* esse involgono il concetto de' *termini* dai quali sorge la *relazione*. Somministrare le idee di questi termini appartiene appunto al senso geometrico. Esso presta, dirò così, il fondo sul quale si esercita ogni specie di calcolo. Esso quindi è il primo che agisce in noi. A lui dunque appartiene in prima ed ultima analisi il *concetto positivo* dell'unità sì metrica che complessiva.

24. L'unità *complessiva*, sia sensibile, sia mentale, riunisce molti concetti i quali presentano qualità esclusive e qualità comuni nelle parti, ed una proprietà semplice individua nel tutto che non si può *tramutare* in un'altra. Da ciò ne deriva talvolta una *incommensurabilità* assoluta. Ciò però non toglie che dessa non si possa risolvere in dati elementi. Colla cognizione sola però di questi elementi non si giunge a quella unità. Non sarebbe più vero che esista una forma unica indivisibile e tutta propria del solo complesso, se l'idea dell'elemento potesse esprimere quella del tutto.

Un falegname costruisce la ruota di un carro, ed un muratore fabbrica una torre rotonda. Tre cose si possono domandare. La prima *quanto materiale* sia stato impiegato nel dato lavoro. La seconda, quali *forme speciali* avessero le parti maggiori componenti quest'opera: e quante di una forma e quante di un'altra siano state impiegate e come siano state collocate nel costruire l'opera suddetta. La terza finalmente quale sia la *dimensione* di tutta l'opera suddivisata.

Quando voi domandate *quanto* materiale sia stato impiegato, voi fate astrazione tanto dalla forma unica complessiva del tutto,

quanto dalla forma o forme diverse delle parti singolari. Quando voi chiedete della *figura* delle parti maggiori e del numero e della collocazione di queste figure, voi fate astrazione tanto dalla forma complessiva di tutta l'opera, quanto dalla qualità e quantità degli elementi primi, ossia degli atomi che compongono queste parti maggiori. Quando finalmente vi rivolgete alla *dimensione* del tutto, voi prescindete dalle minute particolarità sopra ricordate per ottenere invece un concetto semplice ed univoco di questa dimensione.

Ma è cosa di fatto che tanto le forme, quanto il numero degli atomi, delle parti maggiori e del tutto esistono *congiunte* nell'opera. Egli è di fatto che tutte *concorrono* a costituirla nella vera sua dimensione e figura semplice ed unica. Ora vi domando se malgrado ciò io possa o no convertire la dimensione del tutto in una *forma discreta* di grandi parti dissimili? Se io possa o no trovare i componenti *razionali* di queste grandi parti, benchè l'espressione loro *complessa* sia *incommensurabile*?

Altro è dire che un dato effetto derivi dalle date cagioni, ed altro è il dire che egli sia di *carattere* o *simile* o *dissimile* di

quella delle sue cagioni. Altro è il dire che egli sia in sè stesso composto o misto, ed altro è il dire che abbia un'essenza così semplice, univoca e propria come quella d'ogni cagione considerata singolarmente. Due spinte eguali ad angolo retto fanno seguire al corpo sospinto la diagonale di un quadrato. Due dati suoni fanno sentire sotto un certo angolo un terzo tuono. Ora domando se la direzione del corpo sospinto dai due impulsi suddetti, od il terzo tuono che si fa sentire per la vibrazione dei due, siano o no così *semplici indivisibili* come le due direzioni e i due tuoni presi singolarmente, nell'atto pure che sono tutti e tre dissimili? Che cosa segue da ciò? Egli ne segue che io non potrò certamente tradurre l'idea del terzo tuono o della direzione diagonale in un'altra, perchè ne distruggerei il concetto e convertirei il *si* in *no*; ma potrò ciò non ostante trovare gli elementi coefficienti dell'essenza da me concepita.

Ecco ciò che accade nei nostri concetti nel comporre o nell'auallizzare l'unità complessiva. In essa l'associazione del senso geometrico ed aritmetico si palesa apertamente. In tutti i composti assoggettati ad unità dir si può che il *centro formale* e reggitore del-

l'unità complessiva non risiede dentro alcune delle parti singolari, ma fuori delle medesime. Di là egli comunica al tutto le sue affezioni. Da ciò nasce che in ogni parte debbono esistere tanto le qualità singolari, quanto le *attitudini comuni*, senza di che non potrebbero concorrere a formare un sol tutto individuo e dotato di vera unità. Queste attitudini sono il fondamento delle *proporzioni* le quali nell'unità complessiva logicamente sostengono molti *rapporti simultanei*. Un esempio lo abbiamo accennato già sopra quando abbiamo parlato del quadrato dell'ipotenusa.

25. Per la qual cosa fino dai primordj della scienza conviene accuratamente distinguere la *commensurabilità* dalla *unificabilità*. La prima ad altro non si riferisce fuorchè alla coincidenza dei limiti dati alle parti di un tutto sia con un metro comune sia col paragone ad un altro tutto. La seconda per lo contrario si riferisce alla *cospirazione simultanea* di più cose anche diverse a formare un tutto semplice ed individuo, fatta astrazione se queste cose siano o non siano fra di loro commensurabili.

Ma questa unificazione vien considerata qui per quell'unico aspetto che può interessare la logica delle quantità: dunque con-

viene ben distinguere il concetto proprio matematico di essa da quello di qualunque altro finitimo. Il numero a prima giunta presenta di questi finitimi concetti. Ma se voi considerate il numero come l'espressione di elementi ideali simili ed eguali (come sarebbe aritmeticamente quello di più esistenze, e geometricamente quello di più punti escogitabili), voi non raggiungerete mai l'idea generica della unità complessa: perocchè questa può abbracciare nel suo concetto unità, varietà e continuità. Ora perciò solo, che in linea di quantità contiene soltanto la varietà, essa contiene parti disuguali aritmeticamente e parti dissimili geometricamente. Tutto al più dunque il numero considerato come sopra potrebbe bensì formare una *specie* particolare dell'unità complessiva, ma non ne racchiuderebbe i caratteri tutti. Dir dunque si dovrebbe quel numero essere unità complessa *similare* ma non unità complessa *generica*. Questa distinzione è importantissima per il calcolo perchè ne fa variare necessariamente il metodo. Questo metodo deve essere atteggiato a norma della natura propria delle parti e del tutto, e a norma dei rapporti logico-matematici che *simultaneamente* passano sia fra parte e parte, che fra le parti ed il tutto.

Questo basti per ora per preparare il concetto delle idee primitive matematiche in mira allo stabilimento del miglior metodo dell'insegnamento primitivo. Queste idee implicitamente ed eminentemente racchiudono la virtù logica che deve in progresso determinare anche le vedute pratiche. Un ulteriore sviluppo delle medesime sarà forse necessario nel progresso delle proposte disquisizioni. Mi riserbo dunque di presentare questo sviluppo, pago essendo di aver fissato non solo la proprietà dei primitivi concetti, ma eziandio la connessione loro razionale coll'altre leggi già conosciute del nostro intendimento. Così si avrà quel nodo e si conosceranno quegli anelli di comunicazione che connettono le scienze matematiche colla razionale filosofia,

Fine del discorso primo.



PROSPETTO

DEGLI ARGOMENTI DEL DISCORSO PRIMO.

1. Necessità di conoscere l'indole e la generazione degli enti matematici.
2. Generazione naturale delle idee del punto e della linea.
3. Che il punto matematico non è il principio FORMALE della figura, ma è la stessa figura.
4. Delle essenze logiche e del possibile ideale.
5. Dell'esteso finito e figurato. Limiti. Grandezza e piccolezza. Coll'aggrandire o impiccolire non si altera il carattere formale della figura.
6. Fallacia del concetto della divisibilità infinita dell'esteso finito. Dimostrazione logica diretta.
7. Come nasca il giudizio della divisibilità infinita dell'esteso finito. Sua irragionevolezza.
8. Si conferma la dimostrazione di questa irragionevolezza.
9. Che la pretesa infinità suddetta altro in sostanza non è che la impossibilità di cangiar l'essenza logica della quantità.
10. Da che deriva l'illusorio giudizio dell'infinità dell'esteso finito.
11. Assurdità del concetto d'una quantità più piccola di qualunque escogitabile. Sua equivalenza col- l'infinitamente piccolo.
12. Del concetto speciale della quantità.

13. Del concetto del numero. Opinione di Newton e del d' Alembert.

14. Delle grandezze matematiche. Legge prima ed ultima dell' unità con varietà che forma l'essenza prima d'ogni algoritmo. Sua forma ridotta ai minimi termini.

15. Delle vere astrazioni matematiche.

16. Legge universale di associazione dei concetti geometrici ed aritmetici.

17. Distinzione fra l' idea di estensione e quella della materia. Virtù logica fondamentale dell' idea di estensione. Identità e diversità in un punto solo.

18. Senso preciso della commensurabilità. *Coesistenza* in uno stesso oggetto dei diversi rapporti di simiglianza, ragione, proporzione, commensurabilità. Esempio.

19. Delle quantità poste, delle imprestate, e delle logie che intervengono nell' esame della quantità stessa.

20. Dell' unità metrica. Suo carattere meramente relativo.

21. Del senso integrale e del senso differenziale in generale.

22. Vera natura delle idee ontologiche. Loro connessione colle idee matematiche.

23. Della sfera delle matematiche considerata nella loro fonte primitiva psicologica.

24. Del concetto dell' unità complessiva. Come si concilia col senso discretivo.

25. Distinzione della commensurabilità dalla unificabilità.

DISCORSO SECONDO.

*Sull' oggetto , le parti e lo spirito
delle dottrine matematiche.*

1. L' unità, sia metrica , sia complessiva , considerata nella massima sua generalità, non veste alcuna posizione determinata. Ma quest' aspetto è puramente *fattizio*. Esso vien preso in considerazione da noi sol per semplificare l' *oggetto* della nostra analisi, e determinare i caratteri eminenti e perpetui dell' oggetto analizzato. Convien dunque discendere da questo punto altissimo di prospettiva onde rilevare più d'avvicino il naturale aspetto di lui. In questo secondo punto di vista che cosa veggiamo noi? Noi non veggiamo più l' unità *indefinita* , ma la veggiamo *finita* e veramente *figurata*. Noi non veggiamo più il *numero* a guisa o d'una semplice pluralità nè una grandezza geometrica come un più o un meno di estensione; ma a questi concetti si aggiungono quelli delle loro *proprietà naturali* , siano *assolute*, siano *relative*. Allora gli enti matematici ci appaiono dotati di una specie di *personalità* propria come le altre cose tutte esistenti in natura. Rappresentandoli con ordine si forma la loro

storia naturale, e nello stesso tempo si generano i pieni elementi del calcolo. Qui appunto consiste tutto lo spirito eminente della dottrina di *fatto* del primitivo insegnamento delle matematiche.

2. L'arte di osservare somministra l'arte di calcolare. Ma l'arte di osservare è necessariamente determinata dallo *stato reale di fatto* del soggetto e dai *rapporti* che passano fra di lui e la nostra intelligenza. Sarà dunque necessario di porre sott'occhio *tutto il soggetto come sta*, altrimenti non avremo nè piena scienza nè calcolo efficace. Pochi squarci saltuarj, o uno sfumato profilo non somministreranno dunque che risultati imperfetti, o di una rimotissima applicazione. I veri concetti matematici non sono nè fantasie poetiche nè elaborazioni trascendentali. Essi sono risultati necessarj degli *oggetti* aritmetici e geometrici esaminati da noi. Ma questi oggetti ci presentano *qualità assolute* e *qualità relative* proprie e inseparabili. Dunque prima di tutto conviene studiare queste *qualità* e le *leggi* necessarie che ne derivano. Questa sentenza è comprovata tanto dal nostro senso sperimentale, quanto dalla proposizione che il principio della figura è la stessa figura.

Questa proposizione altro non è che l'e-

espressione d'una legge necessaria, la quale, anche non volendo, si manifesta agli attenti calcolatori. Essi veggono difatti più volte comparire ora una similarità dominante fin nelle minime parti d'una divisione determinata dalle ragioni costituenti un tutto; ora un predominio di certi termini posti in una data maniera, ed ora altri fenomeni consimili. Tutti questi accidenti sono la necessaria conseguenza d'una legge necessaria che deriva dalla natura degli enti matematici medesimi. Se gli enti geometrici fossero soltanto generazioni di punti fluenti e di linee scorrenti; e se gli aritmetici fossero nude pluralità più o meno ampliate, ossia elevate a maggiori o a minori potenze, tutti questi accidenti e tutte queste affezioni che ad ogni tratto si palesano nel calcolo, non potrebbero sorgere giammai. Qual partito dunque ci rimane? O di studiare di proposito la natura e le leggi proprie di questi enti, o di ricorrere alle *qualità* occulte dei peripatetici del medio evo. Ma se l'occulto si potesse render palese, non è egli vero che omettendo le ricerche, noi ci condanneremmo ad una ignoranza volontaria? A che pro allora studiare di proposito le matematiche? Forse che carpire qua e là con fatica improba

qualche teorema, forma la ricompensa e costituisce il vero frutto degli studj matematici?

3. Lo studio che io propongo non è nuovo, ma è tanto antico quanto la scienza. Egli è in sostanza uno studio abbandonato od interrotto dalla solita nostra impazienza di scorrere di salto al generale ed all' assoluto, prima di aver gradatamente esaminati tutti i particolari. Le matematiche poi hanno dovuto subire una vicenda particolare non comune agli altri rami dello scibile; e questo si è l' *arcano* che uno spirito di naturale ed universale *analogia* ha suggerito ai primi coltivatori e maestri. Quest' arcano, al quale si unirono gravi interessi, ha sol permesso di esternare i *metodi* delle prime operazioni aritmetiche, occultando la loro origine e le loro ragioni, e il mezzo onde renderne sensibile la derivazione. Così il mondo fu condannato a contentarsi d' un cieco meccanismo, anzichè ottenere una filosofica derivazione dell' arte di calcolare.

È tempo ormai di ristabilire la scienza nelle sue basi. È tempo omai di riannodare il filo interrotto della sua generazione. È tempo omai di conoscere le ragioni di ciò che operiamo. È tempo omai che gli apprendenti siano sollevati dall' improba fatica d' un in-

segnamento preso per la coda, o fatto con precipizio.

4. Per far ciò conviene salire dal sensibile, dal semplice e dal particolare, all'astratto, al complesso ed al generalé. E poichè il senso geometrico deve prestare il fondo, e questo fondo è essenzialmente vario, egli fa d'uopo incominciare ad occuparsi su di lui, e di acquistare la cognizione almeno delle *qualità matrici* da lui presentate, per indi passare alle filiali. Queste *qualità matrici* si rilevano dall'esame delle differenti forme e dei naturali movimenti e periodi delle rappresentazioni simboliche delle quantità.

Il nome di *simbolo* sembrami più adatto che quello di *figura*, sì perchè negli studj puramente teoretici non intendiamo di rappresentare forme esistenti realmente in natura, e sì perchè l'oggetto del loro esame è propriamente quello di condurre all'arte del calcolo. Il carattere simbolico loro, si è quello appunto che può solo autenticare i dettami scientifici. Questo carattere consiste nel porre sotto agli occhi le posizioni, le distinzioni e le composizioni nostre mentali. Ogni specie di disegno ricavato dalla nostra fantasia ha questo carattere. Essi altro non sono che *pitture del pensiero*. Questo schia-

rimento è più importante di quello che a prima giunta possa comparire. Senza di lui si dà luogo a tutte quelle illusioni alle quali un rozzo senso di analogia trascina gli uomini. Senza di lui non si distingue ciò che ci viene dal di fuori, da ciò che noi ricaviamo dal di dentro. Senza di lui non si rintuzzano quelle pretese colle quali intendiamo di dominare la natura. Senza di lui finalmente togliamo la fiducia logica alla scienza, stante che col personificare i nostri concetti noi comunichiamo loro una natura *indipendente* da noi, la quale, oltre d'involgere un falso supposto, gli assoggetta alla critica dei fenomeni esterni. Per lo contrario, col riguardarli come puri modi della nostra mente, ce ne assicuriamo come di qualunque altro reale nostro sentimento. Questi simboli dunque si debbono riguardare come le note della musica, e farli servire come ci serviamo delle note suddette.

5. Scoprire le *qualità razionali* degli enti matematici prodotte sia dalla loro composizione, sia dalla loro divisione, sia dai loro nessi, e così discorrendo, ecco l'OGGETTO LOGICO IMMEDIATO del *primo* esame di questi simboli. Varie possono essere le *forme* o del tutto o delle parti loro; ma desse non pos-

sono servir tutte al calcolo. Le prime sono quelle che nascono dalla formazione o divisione di un tutto avente unità di concetto con radici *razionali*. Esse allora fanno la funzione di guide e di mediatori proprj e naturali. Senza il loro soccorso ogni concetto rimarrebbe necessariamente isolato. Senza le indicazioni loro non si potrebbero veramente tessere certi calcoli. Esse formano, dirò così, i muscoli ed i nervi del corpo matematico. Il calcolo è un' *arte* che riposa su una scienza di *fatto*. La scienza di fatto non si acquista che coll' *osservazione* dei fatti medesimi. Questi fatti altro non sono che i concetti nostri geometrici, sia primitivi, sia secondarj, coi quali comprendiamo o paragoniamo le quantità. Per fatti primitivi io intendo quelli che si manifestano per via di una ordinaria attenzione, madre del senso comune. Per fatti secondarj intendo quelli che si manifestano per via di una studiata induzione.

Quando la scienza è nata, si trascinano e si classificano questi fatti. Quelli che debbono essere sottoposti agli occhi degli apprendenti, sono certamente i più semplici, ma ad un tempo stesso i più fecondi. Tutte le *posizioni* dunque *primarie* del mondo matematico debbono in via di fatto essere poste

sott'occhio. Vedete la natura. Essa non ci presenta verun testo mutilato. Imitiamola dunque almeno nella *prima proposta* per far intendere che quando studiamo in particolare non dobbiamo rimaner stazionarij. Le prime *posizioni* sono rappresentate col simbolo dell'unità geometrica che a bel bello si va trasformando, e secondo le apparenze ampliando, diminuendo ed associando con altre. La *trasformazione* somministra la vera ed essenzial *differenza*. L'associazione somministra la vera *unità complessiva*. Tutte queste forme debbono essere proposte e deliberate, riservando l'esame delle leggi generali ad altro periodo.

6. Nel tessere quest' esame si dovrà certamente far uso di raziocinj, e però di un vero calcolo. Ma questo calcolo non è il calcolo matematico *artificiale* conseguente alla cognizione delle leggi della quantità, ma è un calcolo *primordiale* generale della teoria, e quindi delle regole speciali dettate dalla cognizione di queste leggi. Calcolo *iniziativo* pertanto denominar si potrebbe quello che viene impiegato in questa prima operazione, nella quale si tratta di scoprire l'indole e le leggi delle diverse forme della quantità.

In questo esame primordiale non basta di

far l'analisi dei simboli che stanno fuori di noi, ma conviene far eziandio avvertire a *movimenti* che accadono dentro di noi nell'atto di compiere quest'analisi. Per la qual cosa convien far bene avvertire che ora il senso aritmetico è subordinato al geometrico, ed ora il geometrico all'aritmetico; in modo però che amendue intervengono sempre a dar forma ai nostri giudizj ed alle nostre espressioni. Posto difatti lo stesso simbolo figurato, egli può essere diviso o estimado in mille diverse maniere. Fra tutte però convien preferire quella sola che vien determinata dai rapporti essenziali della sua posizione, e dai bisogni della nostra mente rivolta a determinare sì il valore di tutte le parti dell'esteso esaminato, che le loro proiezioni, le loro connessioni, le loro convergenze; e in breve tutto ciò che può esigere in futuro il ministero del calcolo.

7. Queste ricerche nascono spontaneamente le une dalle altre allorchè l'esame venga incominciato a dovere. La figura stessa, come vi somministra le risposte, così vi suggerisce anche le ricerche che dovete istituire. Affine di *incominciare* a dovere quest'esame si debbono proporre tre generali ricerche: la prima quali siano i *caratteri proprj* di quella

tal figura. La seconda quale ne siano i coefficienti tanto a riguardo delle parti, quanto a riguardo del tutto. La terza finalmente quali ne siano i vincoli di connessione, di tendenza con altre, e quindi quali gli elementi per convenire a formare un tutto individuo. I risultati di queste ricerche fatte a dovere somministrano tutti i lumi primitivi di fatto per conoscere le leggi naturali delle quantità. Studiando posatamente queste leggi si formano le regole speciali e generali del calcolo.

8. Con queste regole si effettuano le leggi dell'umana intelligenza rivolta all' esame della quantità. Le figure diverse esaminate in senso divisò e in senso unito vi presentano di nuovo un gran tutto, le varietà del quale altro non sono che le metamorfosi, dirò così, d'una grande unità. La serie ordinata di queste metamorfosi, le relazioni e i passaggi dalle une alle altre, vi somministrano appunto i termini e i modi del calcolo *universale* matematico. In lui si riuniscono tutte le differenti specie di calcolo come altrettanti rami d' uno stesso albero. Qui noi entriamo nella parte *operativa* delle matematiche, nella quale appunto consiste il merito loro. La parte *OSTENSIVA* o contemplativa non è che

il mezzo per giungere all' operativa. Questo scritto versa sul metodo d' insegnamento. La parte dunque OPERATIVA esige una speciale attenzione.

Domando dunque in primo luogo che cosa sia il calcolo? Esso viene comunemente definito « quell' operazione del nostro intelletto, mediante la quale noi procuriamo « di determinare e di esprimere i diversi « rapporti delle quantità ». Questa operazione, a norma dell' oggetto e dello scopo speciale che si propone, riceve pure speciali denominazioni. In tutte queste specie per altro l' operazione suddetta tende sempre a ridurre a termini più *semplici* e più *compendiosi* che può, l' espressione di questi rapporti.

Quando si conoscono i mezzi opportuni di far tutto questo, si conoscono le *regole* del calcolo. Quando effettivamente si sa impiegarli con esito, si ha la *perizia* del calcolo. La collezione o il complesso di queste regole costituisce l' *espressione* dell' arte. Il *possessione pratico* maggiore o minore dell' arte, forma la *perizia* maggiore o minore, e quindi il merito maggiore o minore d' un calcolatore.

9. Domando in secondo luogo il *perchè* sia *necessario* il calcolo? Perchè da una parte

gli oggetti che dobbiamo o vogliamo conoscere, sono tanto varj, tanto numerosi, e in massima parte nascosti, e dall'altra la nostra percezione è tanto angusta, confusa, ed arrestata dalle prime apparenze. Questo fatto è *comune* ad ogni specie di cognizioni nostre; e però in tutte le nostre *deduzioni* interviene veramente una specie di calcolo.

L'argomentazione è opera dell'intelligenza limitata. Mediante il paragone di due idee con una terza, essa può scoprire que' rapporti i quali immediatamente non si presentano all'intelletto.

10 La natura è la prima maestra. L'arte altro non fa che *trascegliere* quelle maniere le quali l'esperienza mostrò acconcie ad ottenere l'intento proposto. Ecco la *logica artificiale* figlia e compagna della naturale. Dico anche *compagna*, perocchè anche dopo il ritrovamento della artificiale essa esercita ancora il suo dominio in mille e mille occasioni le quali non furono contemplate dall'arte. La logica dunque naturale si può dir sempre *predominante*; perocchè sono molto più numerose le circostanze nelle quali si ragiona ed agisce senz'arte, che quelle nelle quali si ragiona ed agisce con arte. Per tal mezzo l'uomo anche nella più inoltrata

civiltà è più discepolo della natura che delle istituzioni fattizie della società.

Venendo al calcolo noi siamo costretti a confessare che il calcolo *matematico* è figlio del calcolo naturale e forma un ramo particolare di questo calcolo primordiale. Difatti nello studiare la *storia naturale* delle quantità per ricavare le *leggi* della medesima, e quindi far nascere le regole del calcolo matematico, noi siamo costretti di usare il calcolo. Per la qual cosa le regole del calcolo matematico derivano da un altro calcolo anteriore il quale si confonde coll'arte di pensare comune a tutto lo scibile umano. Non confondiamo le *Regole* del calcolo eoi *principj filosofici* del medesimo; nè la origine e l'analisi dei concetti logici colle pure definizioni e colle deduzioni secondarie. Il calcolo è un' *arte* ed un' *arte* di prima necessità. Esso ha preceduto la scienza filosofica, come le altre arti tutte primitive. In esse la *ragion* dell' *arte* vien dedotta dalla pratica e dalle produzioni dell' *arte* medesima. La prima creazione è ispirata, dirò così, dalla natura. L' uomo allora contempla l' opera della sua mano. Da ciò che ha fatto impara a far qualche cosa di più; ma per lunga pezza prosegue a fare. Finalmente studia la *ragione*

di quello che fece, locchè egli pratica rientrando in sè stesso e indagando la natura e l'andamento de' suoi pensieri. Rimane certamente come rimarrà sempre molto di inavvertito e di occulto, perocchè la mano può fare assai più di quello che la mente possa discernere ed intendere; ma sol collo studiare ciò che si può discernere e col dar la ragione di ciò che si può intendere, si può ampliare il dominio nostro razionale.

11. Pare a prima giunta che il calcolo non abbisogni d'alcuna analisi filosofica perchè egli porta un frutto certo che acquieta l'intelletto. A che rompersi la testa, dirà taluno, ad indagare la natura propria del calcolo, quando vediamo ch'esso ci somministra i risultati che domandiamo? Prima di tutto io rispondo non esser vero che col calcolo usitato si ottenga tutto ciò che si vuole. Se ciò fosse, io non sentirei a parlare nè di casi irriducibili nè di equazioni irrisolvibili nè di insufficienza della matematica applicata nè di altrettali argomenti. In secondo luogo rispondo che per lo stesso motivo il farmacista, il tintore ed altri, che professano molte altre arti, potrebbero pretendere che la chimica sia inutile. In terzo luogo poi rispondo che quando al calcolo

si voglia attribuire il privilegio d'essere usato senza la cognizione di cui parlo, allora non conviene parlarne più nè di calcolo algebrico nè di calcolo sublime, ma solamente del comune aritmetico. Difatti nell'algebrico non solo si considera la quantità sotto un aspetto più *eminente* che nell'aritmetico usuale, ma eziandio si fa uso di certe affezioni e di molte leggi *comuni* degli enti matematici. Ne abbiamo una prova luminosa nell'applicazione dell'algebra alla geometria. Quanto poi al calcolo sublime, noi scopriamo che le di lui massime fondamentali non possono essere nè giustificate nè migliorate senza la cognizione filosofica della quale parlo qui. Invano pertanto ci potremmo sottrarre dalle proposte ricerche sulla natura primordiale delle quantità, a meno che non preferiamo un cieco e fortuito empirismo all'illuminato e ragionato modo di operare.

12. Il calcolo è un' *opera* di ragione e non di fatto arbitrario. Dunque è necessario di conoscere tanto le cose che si *debbono omettere*, quanto le cose che si *debbono fare*. Quanto alle cose che si debbono omettere vige un principio generale, che tutto ciò che è *assurdo logicamente*, e tutto ciò che è *fraudolento praticamente*, debbe essere bandito dal

calcolo sotto pena di nullità. Se per una considerazione generale non fosse possibile di annoverare tutti questi assurdi e queste frodi, dovrebbero almeno i maestri segnalare quegli assurdi e quelle frodi che illusero con effetto tanti uomini, e salire alle cagioni che ne possono rinnovare gli esempi.

Il celebre Lagrangia ha pubblicato un libro che porta il seguente frontispizio : « Teoria
« delle funzioni analitiche, contenente i prin-
« cipj del calcolo differenziale scevri da ogni
« considerazione d'infinitamente piccoli o
« di evanescenti, di limiti o di flussioni, e
« ridotti all'analisi algebrica delle quantità
« finite ». Questo solo frontispizio manifesta il colpo d'occhio e il sentimento d'un uomo di genio che non tollera nè l'assurdo nè la frode. Qui l'autore altro non dichiara che di voler far senza di *infinitamente piccoli*, di quantità che *svaniscono*, di limiti per tramutare gli eterogenei in un sol concetto commensurabile, di flussioni per confondere in uno le essenziali dissimiglianze. E perchè mai non si è desso occupato prima a dimostrare che se ne deve far senza? Perchè mai quel gran genio non ha voluto precluder l'adito a quei metodi che egli ha rigettati, mostrandone l'illusion logica e la fallacia? Col dire

semplicemente al pubblico: ecco che si può far senza di questi metodi, non ha dimostrato che *se ne debba* far senza, e però ha lasciato ancor la facoltà di usarne, come se anch'essi fossero *acconci* a trovar la verità.

Ma qui siami permesso di domandare: o l'autore era persuaso della *irragionevolezza* dei metodi dai lui rigettati o no: se ne era persuaso, dunque non doveva lasciare a' suoi lettori la facoltà di abbracciare o la scuola Leibniziana, o la Newtoniana, o la sua, perocchè fra il vero e il falso, fra il leale e il fraudolento non si può transigere. O l'autore non era persuaso della mentovata irragionevolezza; ed allora fare e dimostrar doveva che il suo metodo fosse *più facile, più comodo e più spedito* degli altri da lui rigettati. Se difatti anche questi venivano da lui riguardati come altrettante strade conducenti allo stesso scopo, altro motivo non rimaneva per far *preferire* la strada segnata da lui, che quella della maggiore comodità e speditezza. Ma egli non ha fatto nè l'una nè l'altra cosa forse per la somma modestia che lo animava. Così noi siamo rimasti defraudati da un massimo servizio che quel sommo genio avrebbe potuto rendere alle matematiche.

Solamente col dimostrare l'irragionevolezza dei metodi da lui rigettati, egli avrebbe compartito un inestimabile ed eterno beneficio. Abbattuto una volta dalla possente destra del genio il grand' albero piantato da' suoi antecessori, e strappatene le radici per sempre; eretto quindi un muro insormontabile ai veri confini della scienza, tutti coloro che venivano dopo avrebbero almeno imparato a non tentar più la strada dell' errore e della frode. Quindi quand' anche non avesse egli segnata la via diretta, avrebbe obbligati gli altri a non ismarrirsi per i sentieri fallaci tracciati da' suoi antecessori.

Questo beneficio sarebbe stato durevole, quand' anche il metodo da lui inventato avesse dovuto perire. Consumata una volta l'opera della *distruzione*, si avrebbero potuto rinnovare più volte anco invano i tentativi della edificazione; ma quelli che fossero stati ben distrutti una volta, non sarebbero risorti mai più. Per la qual cosa se fosse vero quanto da un settentrionale trascendentalista è stato bruscamente rinfacciato al Delagrangia, che il di lui metodo è falso (1), avremmo al-

(1) V. Wronski. Introduzione alla filosofia delle matematiche, pag. 32.

meno un criterio *negativo* per giudicare se quello del suo censore sia esente dai vizii già dimostrati. Dico un criterio negativo per far intendere che se l'antagonista avesse impiegato mezzi già riprovati dalla ragione nel costruire il suo nuovo edificio, si avrebbe potuto, posta una chiara dimostrazione, accordargli esser vero non avere il Delagrangia ancor indovinato il vero metodo del calcolo proposto, ma esser vero nello stesso tempo che il suo censore ha pure tentato invano l'opera medesima.

Difatti dimostrata una volta con rigor filosofico l'irragionevolezza dei metodi rigettati, ossia dei mezzi fondamentali loro, se per avventura il nuovo riformatore settentrionale si fosse prevalso di alcuno di codesti mezzi, ogni lettore avrebbe potuto dirgli: Guardate bene, o signore, che voi adoperate un mezzo *assolutamente* riprovato, e però il vostro assoluto trascendentale è un assoluto trascendentalmente e in via assoluta riprovato.

13. Tutto questo serva in via di esempio per far sentire quanto sia necessario (specialmente prima che una scienza e un' arte sia giunta al suo apice), quanto, dico, sia necessario di far annotare le cose che si deb-

bono *ommettere* prima di mostrar quelle che
 si debbono o che si crede doverai praticare.
 Il mostrare quello che debbesi omettere non
 importa assolutamente la *cognizione* di ciò che
potrebbe con buon successo operare. Io mostro
 ad un navigante esservi scogli o voragini in
 dati punti dell'Oceano; essere in certe sta-
 gioni il mare soggetto a desolanti tempeste.
 Se io tralascio di mostrargli la via più breve
 e più sicura onde approdare ad una data
 costa, o che io la ignori, o che io prenda
 abbaglio, cesseranno forse le notizie di fatto
 da me date di esser vere? Fingiamo ora che
 taluno proponesse di seguire la via piena di
 pericoli, e che porta a certa perdizione,
 come se essa fosse strada opportuna, lasce-
 rebbe forse d'esser vero che colui mostra
 la via della perdizione invece di quella del
 salvamento? Dalla similitudine passiamo al
 fatto. Per dimostrare le cose, dalle quali ci
 dobbiamo *astener* nel calcolo, non è sempre
 necessario possedere l'arte del calcolo. Anzi
 quando non si tratta delle *semplici maniere*
di esecuzione, ma si tratta invece dei *prin-*
cipj eminenti di ragione ed anteriori al cal-
 colo; non solamente non è necessario di pos-
 sedere il meccanismo del medesimo; ma anche
 possedendolo, fa d'uopo di guardarsi dal-

l'usarne, specialmente quando si vogliono dimostrare i *doveri negativi* eminenti ed universali.

14. Ciò che non si può nè si deve fare in forza soltanto dei principj primitivi universali ed irrefragabili di ragione, costituisce il tenore di questi doveri *negativi*. Se niun mortale ha diritto di comandare alla logica, e meno poi di capovolgerla, i maestri di matematica dunque dovranno piegare il collo a questi doveri. Invano potrebbero sottrarsi col mostrarmi una lanterna magica, un giuoco di bussolotti o una fantasmagoria. Voi commettete, risponderei loro, un circolo vizioso. Qui si tratta dei principj di ragion comune. Il terreno sul quale dobbiam disputare non è quello delle fate, ma è quello del buon senso e della natura. Voi, col rifiutarvi dal venire in questo campo, vi sottraete dal combattimento decisivo. Qui si deve combattere, e qui si deve vincere per dichiarare se la vostra vittoria sia legittima o no. Ogni altro partito è un sotterfugio, ed ogni sotterfugio è un rifiuto di voler una decisione legittima della causa della verità. Si racconta che Cremonino, peripatetico, invitato da Galileo a mirare col suo telescopio il cielo, abbia ostinatamente ri-

fiutato di farlo per timore d'essere costretta a confessare che i cieli non erano incorruttibili e cristallini, come aveva imparato dalla scuola, ed aveva pur egli insegnato. Ecco il caso di quei matematici i quali si sottraggono dalla discussione dei primitivi principj di ragion comune che presieder debbono al calcolo, o che alle censure della filosofia contro i metodi adottati, contrappongono un colpo di fantasmagoria matematica.

15. Invano per altro ricorrono anche a questo partito; perocchè la filosofia sa cogliere i concetti nascosti, sa decomporre i composti e sa dissipare gli illusorj. E per verità quando i matematici nell'impotenza di far coincidere la valutazione di due oggetti essenzialmente incomensurabili, stabiliscono un valore o una misura di mera *approssimazione*, la ragione mi dice che se essi presentano una cosa *specolativamente inutile*, non mi presentano almeno una cosa *logicamente assurda* o fraudolenta. Ma allorchè dopo avere diviso ed angustiato l'oggetto, e ridotte le cose ad un residuo, a loro dire minutissimo, e peggio infinitamente piccolo, lo volessero scartare e quindi valutare l'oggetto *accomodato* senza far entrare lo scartato, la ragion primitiva, ossia il senso co-

mune, mi direbbe che essi non solamente mutilano l'oggetto *proposto*, e realmente lo tramutano in un altro, ma pretendono che io debba riguardare l'oggetto scambiato come *identico* al primo *proposto*. Quindi esigono che il calcolo che versò sull'oggetto *scambiato* venga da me riputato come fatto sull'oggetto *domandato*, e però che tutte le proprietà, tutte le leggi e tutte le affezioni dimostrate proprie dell'oggetto *sostituito*, si debbano appropriare per *equivalenza* all'oggetto principale *proposto*. Così, dopo aver modellato le persone sul letto di Procuste, pretenderebbero che io dovessi riguardarle come dotate della dimensione che sortirono dalla natura.

Quanto all'approssimazione ho detto in primo luogo essere *specolativamente* inutile. Con questa frase intendo di significare che se per gli usi della vita può essere utile di stabilire valori approssimativi, ciò è inutile per la teoria intellettuale della quantità. Negli usi della vita noi abbiamo per confine il *discernibile fisico* e per motivo un *interesse sensibile*. Voler eccedere questi limiti sarebbe una follia frustranea. Per la qual cosa siamo obbligati di adattarci ai pesi ed alle misure sensibili, e sensibili il più delle volte ad

occhio nudo , malgrado che colla mente possiamo concepire che rimanga ancor qualche margine , il quale potrebbe essere assoggettato a divisione. Quindi è bene che la matematica insegni il modo col quale si può misurare e ragguagliare colla possibile esattezza il campo del *sensibile* , malgrado che raggiunger non si possa la quantità escogitabile. Lungi dunque dal rigettare assolutamente i processi approssimativi *per gli usi della vita* , io li conservo e gli apprezzo ; di modo che io terrò in maggior pregio , per esempio , la geometria del compasso di Mascheroni , che tutti gli assoluti d'un trascendentalista.

Ma allorchè dal mondo esteriore ci trasportiamo all'interiore , convien cangiare di maniera. Nel mondo interiore dobbiamo prender per norma i confini dell'*escogitabile* per la stessa ragione per cui nel mondo esteriore prendemmo per norma i confini del *sensibile*. Ora siccome il più o meno *sensibile* d'un oggetto materiale ne fa cangiare la quantità fisica , così pure un più od un meno *escogitabile* d'un oggetto immaginato ne fa cangiare la quantità pensata. Il concetto intellettuale della quantità è così immedesimato collo *stato particolare* di lei , che egli è vio-

lato allorchè viene in qualunque minima parte alterato lo stato suddetto. Allora, qualunque sia, non è più quel desso di prima, ma un altro. Imperocchè, l'essenza stessa della quantità consistendo nell'attitudine di ricevere aumento o decremento, ogni stato della medesima consiste appunto in quella tal grandezza sia numerica, sia geometrica, e non in altra. Dunque ogni più ed ogni meno escogitabile costituisce essenzialmente uno *stato* diverso della quantità. Dunque, siccome è metafisicamente impossibile che un meno sia nello stesso tempo un più nell'identico subbietto, così sarà metafisicamente impossibile che una data grandezza possa rimaner *identica* togliendo o anmentando qualunque benchè minima *parte escogitabile* alla medesima. Qualunque sia il nome che voi diate a questa parte, qualunque sia il concetto sotto il quale la presentiate, tosto che dessa è suscettibile del concetto di *parte* della grandezza, essa costituisce un più ed un meno rispettivo. Ma, tostochè costituisce un più od un meno rispettivo, essa per ciò stesso fa cangiare stato alla grandezza, e ne fa nascere un'altra. Con qual nome piace a voi di chiamare questa parte? scegliete: per me è tutt'uno. Amate voi di chiamarla un infi-

nitamente piccolo? Qui vi risponderò, o voi volete che esso sia un vero *nulla*, o che sia qualche *cosa*. Se è un vero *nulla*, dunque è assurdo appropriargli il nome di *piccolo*, il quale involge l'idea di *cosa esistente e sussistente*. Dunque è pazzia farne menzione nel calcolo, nel quale si tratta di combinare e di paragonare l'esistente. O volete che sia *qualche cosa*, ed allora egli è una vera quantità. Considerandolo poi come parte d'una grandezza, egli ne costituisce così l'unica essenza, che senza di lui ella cessa di esser tale. Col dirlo infinitamente piccolo, altro non dite esser egli d'una piccolezza *indeterminata rispetto al tutto* col quale lo confrontate o nulla più. Con ciò che cosa mi dite voi? O mi dite di non sapere di *quanto* sia minore, o figurandovi un quanto, non volete esprimere questo quanto. Che se poi vi saltasse in capo di prescindere dal rapporto *speciale* della data grandezza, e mi voleste scambiare questo infinitamente piccolo puramente *rispettivo* con un infinitamente piccolo *assoluto ed universale*, in tal caso io vi rimanderei alla irrefragabile dimostrazione già fatta nell'antecedente discorso, e vi convincerei di formale assurdo, degno solo d'essere guarito nella casa dei pazzi.

Questa dimostrazione altro non è che una traduzione del principio stesso di contraddizione, come ognun vede; e però dessa è cotanto rigorosa ed irrefragabile, quanto il principio stesso di contraddizione.

Questa dimostrazione è comune tanto alla quantità geometrica quanto all'aritmetica, anzi, a dir meglio, essa è eminentemente universale e primitiva. Essa altro non è che uno sviluppo dell'idea stessa della quantità. Niun trascendentalista assoluto potrà mostrarmi concetti più estremi e ontologicamente anteriori a quelli de' quali ho fatto uso.

A che dunque servir può il concetto dell'infinito nel calcolo matematico *specolativo*? In buona logica non serve a nulla di determinato. Ma perciò stesso che non serve a nulla di *determinato*, non serve a fissare niuno *stato positivo* della quantità, il quale risulta da un più, da un meno definito. Non serve dunque a stabilire alcuna induzione rispettiva, e quindi non può far la funzione di *verbo*.

L' unica espressione ragionevole pertanto, che ricever può questo infinito, sia grande, sia piccolo, si è quella che indica che una data cosa figurata, vien concepita *indeterminatamente maggiore o minore* di un' altra, e nulla più. Ma col semplice epiteto di *mag-*

giore o minore voi esprimete lo stesso concetto senza ricorrere a locuzioni tenebrose d'infiniti grandi e piccoli.

Ma ridotto il significato al suo vero valore, ed impiegando quindi le nude parole di *maggiore o minore*, io domando ai calcolatori che usano degli infiniti: potete voi o no, adoperando le nude parole o i segni di maggiore o minore, far procedere nè più nè meno il vostro calcolo? Se mi rispondete di sì, allora io v'intimo in nome del buon senso di abbandonare la tenebrosa e subdola denominazione d'infiniti, e di far uso degli umani e ragionevoli vocaboli di *maggiore o minore*. Se mi rispondete di no, allora, anche prima di entrare nel labirinto del calcolo, fermamente vi predico che quel che fate con questi infiniti, è una mera illusione alla quale sta sotto l'*assurdo*, perocchè l'opera vostra è un vero logico delirio. Voi stessi alla lunga ve ne accorgeteste con vostro rossore. Allora aprendo gli occhi comprendereste che la vostra ragione fu preda d'un sogno ingannatore, e vi riconciliereste colla ragione comune e colla buona filosofia.

Poste queste considerazioni fondamentali, io predico che nel calcolo *specolativo* non solamente ammetter non si deve veruna con-

siderazione di quantità infinitamente grandi o piccole, ma eziandio che astener ci dobbiamo da ogni espressione *definitiva frazionale*, e da ogni tentativo di *approssimazione*, il quale scinda la unità rispettiva, sia complessiva, sia metrica determinata dai rapporti necessarj dei termini assunti.

Prematura sarebbe qui la dimostrazione di questa conclusione *particolare*, perocchè non ho ancor posto in luce tutta l'indole essenziale e lo spirito logico del calcolo. La vera immagine filosofica del calcolo sfuma sotto li processi come il principio dell'organizzazione e della vita sfuma sotto l'analisi e le combinazioni chimiche. Quest'immagine non può esser colta e tratteggiata che mediante quella luce intellettuale e mediante quella perspicacia che fa ravvisare i tratti reconditi dell'uomo interiore.

16. Non eccedendo i confini del punto di prospettiva, dal quale ora rimiriamo il nostro soggetto, e valendoci soltanto dei principj primitivi di ragione, qui si presentano alcuni doveri *negativi* riguardanti il calcolo degli escogitabili. Il primo consiste: « Nel
« non confondere ciò che è immaginaria-
« mente, e in senso diviso diciam possibile,
« con ciò che veramente ed in senso unito

« può esistere , ed effettivamente può esser fatto ».

Contro questo dovere si pecca quotidianamente anche dai sommi matematici, e da questi peccati sorgono concetti mostruosi e locuzioni assurde. Io mi spiego con un esempio.

Posto un circolo diviso in quattro parti, e inscritto un quadrato la di cui diagonale venga da me presa come l'ipotenusa, avrò due lati del quadrato inscritto, che faranno la funzione di cateti. Qui tutto porta l'impronta dell' *eguaglianza*; ma qui nello stesso tempo si preclude l'adito a *distinguere*, a paragonare ed a vedere ciò che una diversa misura dei cateti presentar mi potrebbe. In questa posizione però io rilevo certe *proprietà* e certe *leggi* le quali essendo *indipendenti* dalla considerazione dell' *eguaglianza* dei cateti, si dovranno rispettivamente verificar sempre anche posta la *disuguaglianza*. Così veggo, per esempio, che dal vertice del triangolo rettangolo tirata una perpendicolare fuo al fondo del quadrato dell'ipotenusa, ognuna delle parti di questo quadrato, qualunque ne sia la dimensione, sarà eguale rispettivamente al quadrato del cateto che le sta sopra la testa. Così pure veggo che se

qui l'altezza del triangolo rettangolo coincide col raggio perpendicolare all'ipotenusa, quest'altezza non si può verificar più, tosto che variano i due cateti inscritti nello stesso semicircolo e poggiati sulla stessa ipotenusa. Allora per necessità deve scemare l'area del triangolo rettangolo nel semicircolo, il quale altro non è che la metà del parallelogramma inscritto entro tutto il circolo. Veggo allora che cessa un'altra coincidenza superficiale fra l'area del triangolo rettangolo, ed il quadrato del raggio perpendicolare. Allora nascendo un quadrilungo maggiore di quello di due quadrati perfetti, ne segue che il quadrato del lato minore di questo quadrilungo non mi può offrir più l'equivalente della metà dell'area di tutto il quadrilungo, come il quadrato dell'altezza del primo quadrilungo composto di due quadrati perfetti mi offriva l'equivalente della metà dell'area dello stesso quadrilungo (1).

(1) Io adopero il nome di quadrilungo anche col voto di celebri ed esatti matematici i quali col nome generico di parallelogramma (sotto il quale anche gli antichi comprendevano sì il quadrato che qualunque figura a lati paralleli) riconoscono non venir ben connotato il parallelogramma avente quattro angoli retti con quattro lati, due più lunghi e due più corti. — Vedi *Légendre*.

Qui facciamo punto. Se per una considerazione puramente metafisica io penso di formar due cateti disuguali, quali induzioni io trarre ne potrò? Io potrò tosto figurarmi che questa disuguaglianza sia in astratto, grande o piccola, vistosa o minima. Io dovrò vedere allora non solamente diminuirsi la linea dell' altezza del triangolo rettangolo formato dai cateti e dall' ipotenusa, ma questa linea più o meno discostarsi parallelamente al raggio perpendicolare col quale prima coincideva, e lasciare fra mezzo uno spazio più o meno largo in forma di lista rettilinea. Allora io veggo che la *potenza* della linea di quest'altezza, più la potenza di quella che forma la testa della lista mi contrassegnano due quadrati la somma dei quali equivale all' area del quadrato del raggio. Allora veggo nel così detto quadrato geometrico della testa della lista un equivalente di quello che è stato tolto alla metà del quadrilungo primo composto dei due quadrati perfetti cui chiamerò *quadrilungo dell' eguaglianza primitiva*. Qui dunque paragonando la posizione dell' eguaglianza con quella della disuguaglianza suddetta, trovo nella prima elementi tutti costanti, e quindi risultati sempre identici, — Nella posizione per lo contrario della disuguaglianza possi-

bile dei cateti e delle altre parti conseguenti, non trovo di costante che l'ipotenusa e il suo quadrato, ed il raggio del circolo ed il suo quadrato.

Ora se io soltanto dicessi, *essere possibile* che lo stato delle linee e delle arce varii più o meno, che cosa avrei detto io, che possa servire al calcolo? Nulla e poi nulla. Converrà sempre almeno che io figuri in via di prima posizione ipotetica UN PIU' O UN MENO POSITIVO, sia per via di aumento, sia per via di decremento, sia per via di aggregazione, sia per via di divisione, sia per via di proporzione, sia per via di ragione ecc. Questa verità è ontologicamente evidente pensando soltanto che il calcolo, considerato anche metafisicamente, consiste nel complesso delle funzioni necessarie, ossia di quello che *far si deve* per giungere alla VALUTAZIONE delle quantità algebriche (1). La valutazione, io lo ripeto, la valutazione forma l'oggetto finale del calcolo. Ora è vero o no che la valutazione è metafisicamente e praticamente impossibile senza la considerazione d'una quantità positiva determinata? Dunque la nuda ed astratta

(1) Wronski, *Introduzione alla filosofia delle matematiche*, pag. 206.

considerazione del più o del meno della variabile grandezza, sia aritmetica, sia geometrica, ossia meglio il concetto della metafisica possibilità di questa variazione, e quindi dei gradi comunque possibilmente piccoli, è una considerazione o oziosa o incompetente per il calcolo o per qualsiasi altra funzione nella quale si tratti di paragonare le quantità.

Per la qual cosa tornando al mio esempio, io potrò bensì figurarmi che la perpendicolare che divido il triangolo suddetto possa per una insensibile lista discostarsi dal raggio, e quindi che debba a bel bello sempre più accorciarsi. Potrò quindi anche figurarmi che il raggio perpendicolare e verticale a guisa d'una sfera di orologio vada scorrendo tutti i punti del quadrante fino a coincidere colla metà dell'ipotenusa proposta, ossia col semidiametro orizzontale, e scorrendo questi punti mi segni l'estremo di tante perpendicolari verticali di altrettanti triangoli. Potrò in conseguenza figurare un graduale incremento o rispettivo decremento possibile di aree. ecc. Ma a che giova tutto questo per effettuare la valutazione, o per stabilire qualsiasi differenza positiva o geometrica o aritmetica? Nulla e poi nulla. Io traccio su d'una carta un circolo: tiro il diametro;

poi colla penna segno un taglio a capriccio o sul diametro o sulla periferia senza sapere che cosa abbia tagliato. Piglio questa figura e dico ad un geometra: determinatemi il valor dei cateti, delle linee e delle aree che vengono in conseguenza di questo taglio; che cosa aspettare mi potrei da questa proposta? Ognuno mi risponde che quel geometra mi domanderebbe che io gli dica *quanto* abbia tagliato: e che quindi si presterà alla mia inchiesta. Ma se io non volendo o non sapendo dirgli questo quanto, pretendessi ciò non ostante che soddisfacesse alla mia inchiesta, che cosa aspettar mi potrei? Ognuno mi risponde che almeno in suo cuore quel geometra direbbe che io sono una gran bestia.

17. Dall' esempio passiamo alla teoria. Altro è che una considerazione metafisica mi presenti l'astratta *possibilità* della valutazione, ed altro è che me ne somministri il *mezzo*. Altro è che dessa mi fissi certe condizioni costitutive della qualità o delle leggi essenziali d'una grandezza, ed altro è che mi ponga in fatto i dati per i quali possa *determinare* la *rispettiva* loro quantità. La valutazione *generica* altro non è che quella funzione per cui stabilisco il giudizio che un

oggetto è maggiore, minore o eguale ad un altro. La specifica è quella funzione per la quale concludo o essere ella maggiore o minore di tanto di un'altra, o essere la somma delle parti aliquote dell'una, *identica* alla somma delle parti aliquote dell'altra. La valutazione *specifica* forma o no l'oggetto finale del calcolo? Se indubitatamente lo forma, sarà dunque assurdo il far entrare concetti incompatibili con questa funzione, o esigere condizioni impossibili alla sua possanza. Ma così è, che questa valutazione risulta essenzialmente dall'impiego d'un dato elemento che mi serve di misura, e quindi di criterio per pronunziare un più o meno o anche positivo. Dunque egli sarà assurdità stravagante il volere nello stesso tempo o sciogliere l'elemento assunto, o scambiarlo o mescolarlo con un altro vago e metafisico non avente veruna *corrispettività* col soggetto proposto. In questa sola *corrispettività* consiste la *potenza dimensionale* dell'elemento; perchè l'uno metrico assoluto non esiste nè può esistere per ciò stesso che esistono incommensurabili. Certamente sta in mio arbitrio il dividere, per esempio, una data linea o un dato spazio, o allargar un'espressione aritmetica qualunque. Ma tosto

che io scelgo una di queste parti come punto di paragone, e che ne fo uso, non mi è permesso più di togliere il concetto di questo termine. Egli è un fabbricare e un distruggere nello stesso tempo. Posso in vero cangiare la scelta; ma in questo caso rinnoverò la valutazione sul secondo metro da me trascelto; ma non mi perderò mai alla considerazione che questo possa essere o maggiore o minore, come quando peso o misuro, non mi perdo a pensare inutilmente che i gradi della bilancia o del metro *potrebbero essere* più piccoli o più grandi.

Per un' inversa operazione poi io veggio essere frustraneo, ridicolo ed assurdo il volere al favore della considerazione metafisica del più o del meno, stabilire un criterio positivo di valutazione, il quale esser non può che puramente rispettivo, concreto e ipotetico. Riteniamo il principio fondamentale e massimo, che nella valutazione, la *intelligenza* è SUBORDINATA alla *potenza*; io voglio dire che nel calcolo di valutazione i risultati non dipendono da ciò che si può in astratto *pensare*, ma da ciò che si può effettivamente *praticare*. Se i matematici avessero posto mente a questa importante distinzione, non si sarebbero penosamente ed invano affati-

cati a violentar la natura ed a sottomettere ad un' assurda identità di trattamento gli enti essenzialmente dissimili, mediante la mal intesa applicazione di un escogitabile puramente metafisico. Io presento ad un geometra un cerchio in mezzo del quale sta un raggio mobile simile alla sfera d'un orologio. Io muovo a capriccio un tantino di questa sfera. Metafisicamente parlando lo spazio percorso è realmente una quantità rispettiva della periferia. Ma posto questo fatto, potrà mai il geometra servirsi teoricamente e col solo pensiero di questa porzione di spazio percorsa, per tessere un calcolo qualunque o per misurare in qualunque maniera tanto le linee quanto le aree? Ognuno mi risponde che ciò sarà impossibile fino a che io non determini la porzione di spazio trascorsa. Qui dunque vedete che la *cognizione* da me domandata, rimane essenzialmente *subordinata* alla condizione concreta di determinare lo spazio suddetto. Qui dunque la potenza dell'escogitabile è necessariamente dipendente e subordinata alla determinazione *di fatto* dello spazio suddetto. Io non potrò mai conoscere i valori dell' aree e le dimensioni delle linee se prima non conosco di fatto la porzione *rispettiva* dello spazio suddetto.

Ma perciò stesso che si tratta di corrispettivo, si esclude ciò che non contiene la corrispettività, e per ciò si esclude ogni altro rapporto diverso puramente escogitabile e possibile soltanto in una diversa o in milioni di diverse posizioni. Imperocchè il primo è essenzialmente determinato, ed il secondo è essenzialmente indeterminato. Il primo si riferisce ad un dato tutto, il secondo volteggia e sorvola libero nel caos immenso dell'idealismo.

Egli è dunque pessimo ed irragionevole partito quello di fermarsi allo sfrenato e vago escogitabile per trarne indi una regola *direttiva* di ciò che è praticabile e dipendente da una determinata ipotesi. Tale appunto è l'infinito, ossia l'indefinito dal quale sorge la incommensurabilità, contemplato in una *vista indipendente e generale*. Rispetto a questo concorre una doppia assurdità. La prima è quella che risulta dalla considerazione di una vaga e metafisica differenza, quasi che ogni grandezza rispettivamente incommensurabile non avesse uno stato determinato, o quasi che vi fosse un'unità metrica assoluta, e che dessa non fosse che puramente rispettiva. La seconda assurdità poi che qui concorre, risulta dall'attributo d'infinito cui

assoggettar si vuole a *valutazione* sia di eguaglianza sia di differenza.

Malgrado l'evidenza logica di queste osservazioni io trovo i seguenti due teoremi cui rimetto al giudizio del lettore di prima tradurre logicamente, ed indi giudicare del loro merito.

I. Lorsqu'on peut prouver que la *différence* de deux grandeurs invariables est plus petite qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit celle-ci, il en résulte que les deux premières grandeurs sont ÉGALES entr'elles.

II. Lorsque trois grandeurs sont telles que la première, variable, SURPASSANT toujours les deux autres, qui ne changent point, peut approcher en même tems de toutes deux, aussi près qu'on voudra, ces deux dernières grandeurs sont ÉGALES entr'elles (1).

A questi due Canonì si riduce quasi tutta l'altissima sapienza moderna matematica in fatto di *valutazione* non ordinaria dei commensurabili, ma degli intrattabili ed indefiniti incommensurabili. Questi canoni una volta stabiliti, autorizzano a coniare tutti i

(1) V. Lacroix, *Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier*, pag. 295. Paris 1816.

zero relativi coi quali si è tramutato il nome degli infinitamente piccoli. Queste denominazioni di *zero relativo*, sinonimo di quantità infinitamente piccola, le troviamo anche presso il proclamato riformatore nordico delle matematiche Wronski, pag. 204 della citata introduzione.

18. Se invece di tentare questi giuochi di forza riprovati dalla ragione ed eseguiti col far intervenire il puramente fantastico escogitabile nelle operazioni della pratica possibile all' uomo, se invece, dico, di questo irragionevole partito, i matematici avessero voluto rispettare i veri confini della ragione, essi avrebbero tenuto il seguente discorso. Sappiate che per un essenziale concetto passa un' insormontabile differenza tra il curvilineo ed il rettilineo, fra certe grandezze e fra certe altre sia geometriche sia aritmetiche. Noi riconosciamo di buona fede la impotenza dello spirito umano a ragguagliare con una sola misura queste grandezze. Quindi nel circolo, per esempio, noi non potendo far uso che di rette linee, lo rappresentiamo come un poligono di tanti lati, quanti fa di bisogno pel nostro calcolo di *valutazione*, intendendo per altro sempre che la periferia non serva che di limite a questo poligono. In

conseguenza noi non vi presentiamo questo poligono nè come l'equivalente dell'area del circolo nè come esprimente la sua periferia, ma invece noi la poniamo sott'occhio come figura adattata ed accomodata ai nostri bisogni, e come una creazione, dirò così, della nostra mano. Il circolo resta in natura qual è: la figura per lo contrario da noi conformata serve di mezzo allo scopo che si può colle nostre forze attuali ottenere. Lo stesso diciam pure delle altre curve delle quali abbiamo bisogno, sia per calcolare il moto, per esempio, dei pianeti, sia la linea segnata da un proiettile, sia per determinare certe leggi meccaniche ecc. ecc. In breve tutto questo lavoro altro non è, che una possibile approssimazione per supplire ai bisogni della ragione nello studiare la fisica quantità e per giovare alle opere dell'arte. Per la qual cosa dichiariamo di non voler sorpassare le forze dell'umano intendimento, e meno poi di violare i concetti logici delle cose, tramutando il diverso in identico e violentando la potenza della *valutazione* con uno sfrenato idealismo; o viceversa pretendendo che un barlume indefinito che si riceve ad occhi chiusi, serva di metro e di criterio ad una *valutazione* determinata.

Con questo discorso ogni uomo di senno avrebbe applaudito al buon criterio ed alla perspicace industria dei matematici. Ma ben lungi che essi abbiano voluto rispettare i confini dello spirito umano, hanno tentato invece di occupare il posto di un Dio al quale non abbisognano nè calcoli nè induzioni, ma che tutto comprende per un atto puramente intuitivo. Con queste osservazioni io credo di avere dato abbastanza ad intendere quello che omettere si deve nell'arte del calcolo, o almeno credo di avere richiamato la dovuta attenzione sul peccato capitale della moderna matematica nel calcolo delle quantità. Gli altri doveri negativi sono molto minori, e ciò da cui ci dobbiamo astenere è più facile a rilevarsi, ed è opera di osservazioni più particolari e pratiche, le quali non potrebbero trovar luogo in questo discorso nè in verun'altra parte di quest'opera rivolta soltanto a fondare le basi del buon insegnamento primitivo delle matematiche.

19. Dopo di queste osservazioni generali su ciò che debbesi *ommettere* nel calcolo, passiamo a ragionare di ciò che *far si deve*, colla mira soltanto di comprendere in che consista lo *spirito eminente dell'arte* di calcolare.

Ciò che far *si deve* non differisce sostanzialmente da ciò che si *fa* o *far si può* naturalmente: ma riducesi a far *bene*, e in una maniera *avvertita e preconosciuta*, ciò che si *fa* o si può fare naturalmente. Fra le diverse maniere possibili di fare, scegliere quelle che possono *riuscire*, ossia quelle che ci procacciano l'intento proposto, e ce lo procacciano in una guisa più facile, più breve e più proficua, ecco in che consiste l'*invenzione* di fatto di ogni arte nostra. Con essa insegniamo tutto quello che far si deve, ed ommettiamo quello che far non si deve. Scegliere poi queste maniere non per un cieco empirismo, ma colla cognizione del *perchè* si debba fare piuttosto così, che così, *assicura* l'invenzione dell'arte scoperta e ne estende la sfera fino a quel segno al quale giunger può la nostra potenza. Imperocchè conoscendo il *perchè* dell'arte, si distingue perciò stesso quello che si *può* da quello che *non si può*, quello che si *deve fare* da quello che si deve *ommettere*. Ma conoscendo *ciò* che far *si può*, si spinge l'arte fin dove può giungere, e quindi si aumenta la nostra possanza fino a quel segno al quale può essere portata, e nell'atto stesso si previene ogni tentativo *frustraneo*. Conoscendo poi ciò che

fare ed ommettere si deve, ed il perchè si debba fare od ommettere, si presta la direzione utile; e si prevengono i traviamenti nocivi. In questa maniera soltanto si verifica il detto di Bacone, che l'uomo tanto può quanto sa; ritenendo che il sapere non sia ristretto alla perizia empirica, ma comprenda eziandio la perizia filosofica.

Ciò premesso, io domando in che consista lo *spirito positivo* e filosofico, dell' arte del calcolo? Badate bene ai termini della questione. Se voi voleste rispondermi col mostrarmi come si fa a calcolare, voi non soddisfareste a questa domanda; imperocchè quella risposta che voi mi date, io l'ottengo anche dalla macchina aritmetica inventata da Pascal. Orsù dunque, se volete, mostratemi pure il *fatto* del calcolo, ma esponetemi eziandio le parti e le ragioni di questo fatto, e io sarò pago. Così volendo essere bene istruito del meccanismo con cui da una macchina si segnano le ore, voi mi soddisfarete quando mi mostrerete le parti prima segregate, indi coneguate della macchina, e mi segnerete la forza che la move e quella che ne tempera il movimento e i modi meccanici della spinta e dei temperamenti.

Con queste condizioni potete voi rispon-

dere alla mia domanda? Se lo potete, allora potete fissare anche le condizioni del buon metodo del primitivo insegnamento delle matematiche; ma allora egli riuscirà ben diverso dal praticato. Non potete voi rispondere colle condizioni da me richieste? Allora io dico fermamente che le matematiche si aggirano tuttavia entro la crassa atmosfera d'un cieco empirismo, e che l'arte del calcolo non è ancora divenuta *arte di ragione*, ma rimane ancora *arte puramente sperimentale*, nell'atto stesso che aspira ad una possanza eminente ed illimitata.

20. Per quanto io potessi pensare ad unire questi estremi, io li troverei logicamente inconciliabili. Passiamo ora al fatto positivo. Io sento da una parte che sommi matematici erigono l'empirismo in principio di ragione direttiva; e dall'altra sento altri egualmente celebri, che mi citano i risultati infausti dei metodi sperimentali adottati nel calcolo sublime. Ecco gli esempi. SAURIN, impegnato a sostenere e a propagare il calcolo infinitesimale, e volendo togliere di mezzo le difficoltà che venivangli opposte, lasciò scritto nelle memorie dell'accademia delle scienze di Parigi del 1723 quanto segue:

* Les philosophes, et ceux qui ont fait

leur principale étude des hautes sciences, font honneur à la géométrie, quand ils daignent s'y appliquer; mais pleins de confiance en leurs lumières, ils veulent d'abord tout éclairer, comme si tout était obscur. Avec les plus grands lumières et les meilleures intentions, ils pourraient tout gâter en donnant trop, non à la raison, mais aux raisonnemens... Nos calculs n'ont pas tant de besoin qu'on pense d'être éclairés; ils portent avec eux une lumière propre; et c'est d'ordinaire de leur sein même que sort toute celle qu'on peut répandre sur eux, et que peut recevoir le sujet qu'on traite... Ce n'est jamais le calcul qui nous trompe quand il est bien fait; il n'a pas besoin d'être appuyé par des raisonnemens; mais d'ordinaire ce sont les raisonnemens qui nous trompent, et qui ne doivent nous déterminer qu'autant qu'ils sont appuyés par le calcul (1) ».

Con questo discorso ognun vede canonizzato l'*empirismo* cieco del calcolo sublime. La somma di questo discorso riducesi a dire che *bastar deve* il veder l'effetto e la riuscita di questo calcolo, senza vederne la

(1) Lacroix, *Essais sur l'enseignement*, pag. 259-260.

ragione. Ma per mia fè, qual è il principio di ragione col quale qui si tenta di giustificare questa sentenza? I nostri calcoli, si dice, non hanno tanto bisogno di essere illuminati. Essi portano con sè una luce propria. I filosofi coi più gran lumi e le migliori intenzioni potrebbero guastar tutto dando troppo non alla ragione, ma al ragionamento. Esaminiamo questa causale. Che cosa è codesta luce propria cui i calcoli portano con sè, e che cosa è questo *guasto*, che filosofi illuminati, i quali vogliono schiarir tutto, potrebbero recare? Forse che la luce algoritmica è luce d'un sole che, direttamente mirato, abbaglia i risguardanti? In tal caso essa abbaglierebbe tanto coloro che maneggiano il calcolo, senza pretesa di schiarirne i movimenti e le ragioni logiche primitive, quanto coloro che volessero investigare questi movimenti e queste ragioni. In questo caso dunque il fatto del calcolo, e specialmente del calcolo sublime inventato dopo tanti secoli, e praticato da tante poche persone, sarebbe un fenomeno imperscrutabile simile a quello del principio della vita. Così ridurrebbesi la cosa al punto di ricevere una invenzione tarda ed elaborata dell'arte umana come non suscettibile di genesi razionale.

Così ne segue che essa amministrar si dovrebbe senza cercare il perchè, anzi con espressa proibizione di cercarne il suo perchè. Io venero l'abilità d'un calcolatore, ma sapendo che ragionevole deve essere il mio ossequio, gli domando i motivi della fede cieca ch'egli esige da me. Egli mi parla di luce intellettuale, e quindi di ragione che discerne; ma egli nello stesso tempo mi vieta di usare di questa ragione. Come va questa cosa nella matematica, scienza eminentemente razionale ed evidente? Come va questa cosa nel calcolo sublime, metodo tutto artificiale e inventato per una elaborata induzione di uomini moderni, dei quali veggiamo segnati tutti i passi, e i quali, ben lungi di aspirare al titolo d'una rivelazione sovrumana, si fecero un dovere di assegnarne i fondamenti e l'artificio? Voi dite che i filosofi coi *sommi lumi e colle migliori intenzioni del mondo* potrebbero guastar tutto, dando troppo non alla ragione ma ai ragionamenti. Qual linguaggio è questo mai? Che cosa sono i ragionamenti, altro che l'esercizio stesso della ragione, vale a dire, la ragione stessa non in potenza ma in atto? O questi ragionamenti sono giusti o no. Se sono giusti, essi non possono venir in con-

fitto colla verità e con qualsiasi principio, perchè essi non sono che l'espressione stessa della verità: o sono falsi; ed allora non meritano il nome di ragionamenti, ma di erronamenti; e si potranno dimostrar falsi analizzando i termini che contengono. Ma voi li supponete fatti con sommi lumi e di buona fede. Dunque voi temete che la massima del calcolo vostro non possa reggere a ragionamenti fatti con tutto l'ingegno, con tutta la dottrina e con tutta la buona fede. Voi esigete inoltre d'essere dispensato dal mostrar la fallacia di questi ragionamenti, e che ciò non ostante si riceva il vostro calcolo. Io non permetto che si vada investigando il mistero del calcolo sublime, ma esigo che venga ricevuto come sta, e maneggiato alla cieca, pago di vederne l'effetto. Ecco la formola vostra. Basta averla accennata, perchè venga rigettata fino dal senso comune.

Piacebbe al cielo che questa fosse una pretesa particolare del citato scrittore; ma dessa pur troppo è quella del volgo dei matematici, e perfino di taluno che occupa fra essi un posto eminente. Un esempio lo abbiamo in un celebre matematico in un'opera piena di eccellenti viste su l'insegnamento delle

medesime. Questi è il signor De Lacroix, il quale, dopo di aver applaudito ai sentimenti del Saurin, ripetutamente professa d'ignorare la maniera colia quale si acquistano le idee del numero e della grandezza. « Je confesse mon ignorance sur la manière dont les idées de nombre et de grandeur s'acquièrent (1) ». In un'altra opera pubblicata cinque anni prima sul calcolo infinitesimale egli aveva di già emessa questa professione di fede.

La pretesa degli empiristi matematici pare che fosse fondata sopra la sicurezza di possedere uno strumento di universale valutazione. Loro bastava il possesso di fatto di questo strumento, e si credevano dispensati di discuterne la legittimità. Ma questa sicurezza pare che cessar debba a fronte del terribile scandalo avvenuto coi calcoli di Kramp, del merito del quale niuno può dubitare. Egli è stato sospinto, suo malgrado, a tante mostruosità, al dire del Wronski, che lo stesso Kramp ha lasciata scritta la seguente sentenza, che « nelle questioni dei principj matematici i più grandi geometri

(1) Vedi Lacroix, opera citata sull'insegnamento delle matematiche, pag. 175.

sono obbligati di confessare ingenuamente la loro ignoranza » (1).

21. Ciò posto, rimane ancora la necessità di discutere questi principj, o a dir meglio, rimane l'obbligazione di scoprirli e di derivarli dall' unica fonte loro legittima. Questa è la filosofia, la quale, mediante un' analisi attenta, ordinata e perspicace, ponga in luce le condizioni e le leggi fondamentali della parte operativa del calcolo, e supplisca indi e rettifichi ciò che è stato fatto fin qui. Non è del mio istituto il tentare tanta impresa; nè questo sarebbe il luogo opportuno per farlo. Annoterò ciò non ostante un'idea fondamentale che parmi luminosa e decisiva per la buona riuscita dell' arte di calcolare. Fino a che la teoria della valutazione non venga intimamente associata con quella delle ragioni e delle proporzioni, in modo che il passaggio dall' una all' altra non sia effetto dell' industria, ma della *condizione necessaria* degli enti geometrici ed aritmetici, i quali concorrono a formare un tutto sistematico di ragione, l' arte del calcolo universale sarà

(1) V. Wronski, opera citata. Introduzione alla filosofia delle matematiche, pag. 257.

essenzialmente imperfetta. Essa esisterà soltanto allorchè certamente e pienamente soddisferà all' intento al quale è destinata. Ma questo intento non si può ottenere col ramo dell' algoritmo algebrico separato dal geometrico, e quel che è più, senza riunirli amendue con un nodo comune e mediante un terzo criterio indicato dalla stessa natura. Coll' algoritmo algebrico si passeggia realmente sulle creste dei monti senza scendere mai al piano che gli unisce. L' algoritmo algebrico non è dunque nè potrà essere mai *pienamente soddisfacente* ai bisogni della valutazione, ma vi soddisferà soltanto imperfettamente. L' imperfetta riuscita di lui, applicato alla geometria, è un fatto solenne riconosciuto da celebri matematici, e fra gli altri dal Mascheroni. Esso di fatti non comprende tutti i termini naturali che realmente intervengono, e che sono necessarij per valutare anche simbolicamente le quantità. Esso dunque appellar si può col nome di *algoritmo semilogico*. La sua pienezza deve ancora essere supplita, e quindi la lacuna sarà riempita.

Tutto ciò sia detto semplicemente di passaggio. Qui io mi contenterò solamente di accennare alcune osservazioni psicologiche

intorno a ciò che accade nello spirito nostro nell'atto di calcolare, onde preparare le basi del metodo dell'insegnamento primitivo.

22. Incominciando dall'oggetto proprio del calcolo matematico, io fo avvertire che questo non consiste in qualunque *quantità*; ma solamente in quella che può dirsi *fisica*. La prova risulta dalle cose dette nel discorso primo. Questa quantità fisica però non viene considerata *fisicamente*, ma solo *razionalmente*, vale a dire noi prescindiamo dalla considerazione dello stato reale delle cose esistenti in natura, e volgiamo l'esame su il mondo solo intellettuale. Per questo motivo distinguiamo la matematica PURA, dalla mista o applicata. Sebbene l'intellettuale derivi dal fisico ed involga il concetto del fisico, ciò non ostante distinguiamo l'uno dall'altro per la *maniera* colla quale la mente nostra lo contempla. Riunendo quindi questi caratteri dir possiamo che la *quantità fisica intellettuale* forma l'*oggetto materiale del calcolo matematico puro*.

Dico l'*oggetto materiale* per distinguerlo dalle *logie*, ossia dalle idee puramente *relative* eccitate e risultanti dai paragoni e dalle connessioni, e che appartengono tutte al nostro intimo senso. Su di ciò non abbisogno di

estendermi dopo le cose notate nell' antecedente discorso. Le diverse *qualità* dell' oggetto materiale determinano le diverse *relazioni*. Dunque i diversi concetti proprj delle quantità, paragonati o uniti agli altri, determinano le *logie*. Il complesso delle idee degli *oggetti materiali*, delle *logie* e delle *funzioni attive* del nostro spirito riguardanti la quantità fisica-intellettuale forma il concetto complessivo del calcolo matematico puro. La parte intuitiva non si può disgiungere dall' operativa; perocchè qui la cognizione subordinata all' opera serve unicamente all' opera. L' uomo non è un automa, ma un essere nel quale qualunque azione esteriore od interiore *avvertita* deriva sempre dal conoscere, dal volere e dall' eseguire, talchè l' effezione dell' opera appartiene *solidamente* a tutte tre le suddette facoltà.

23. Studiando la *maniera* colla quale queste tre facoltà operano nel calcolo matematico puro, si comprende qual sia il *magistero* di questo calcolo. Esso presenta per sè stesso tanto i caratteri generici, quanto gli specifici, io voglio dire tanto le condizioni *comuni* quanto le proprie. Con ciò noi giungiamo a stabilire la *differenza* fra il *magistero* del calcolo matematico puro, ed il ma-

gistero del calcolo *generale scientifico*. Certamente fra l'uno e l'altro havvi molto di *comune*, perocchè l'*io* che calcola in matematica, è quello stesso *io* che calcola in fisica, in morale ed in psicologia; e però convien conoscere questo *comune* aspetto per rilevare quindi quello che è speciale al matematico.

Il calcolo scientifico, del quale parlo qui, non riguarda la scoperta di ogni specie di verità sia di *fatto*, sia di *ragione*. L'arte di verificare i fatti, che appellasi critica, non entra nelle nostre considerazioni. Non vi entrano nemmeno le disquisizioni sulle cause e gli effetti e sul modo di agire. Rimane adunque quella parte la quale ha una maggiore affinità col calcolo matematico puro. Questa, sebbene non si occupi della *quantità* ma si restringa alla *qualità* delle cose, ciò non ostante manifesta un magistero, il quale si verifica anche nel matematico puro, talchè per questo lato si può dire con tutta verità che il magistero *fondamentale* del calcolo è lo stesso, sia che si tratti di determinare il più, il meno o l'eguale incognito nelle cose, sia che si tratti di dedurne la occulta simiglianza o dissimiglianza. Io entro in una camera e vi trovo due cembali vecchi abbandonati. Alzo il coperchio e veggio che non

rimangono più che le cinque prime corde ad ognuno. Mi viene la voglia di scoprire se le corde dell' uno siano *concordanti* o *discordanti* da quelle dell' altro. Che fo io? Incomincio a toccare la prima corda del cembalo *A*, e tocco pur anche la prima del cembalo *B*. Sento che queste due sono concordanti. Ecco un primo giudizio semplice d' identità. Esprimo questo giudizio, e nasce la *proposizione* singolare, che la prima corda del cembalo *A* concorda colla prima del cembalo *B*. Passo avanti, e sempre toccando la prima del cembalo *A*, la paragono colla *seconda* del cembalo *B*. Qui sento la discordanza. Ecco un secondo giudizio, ma di diversità, ed una seconda *proposizione* che lo esprime. Vado avanti toccando la prima corda del cembalo *A*, e la paragono successivamente colla terza, la quarta e la quinta del cembalo *B*, e la trovo discordante con tutte. Fatto questo primo giro, io esprimo i cinque giudizi singolari con una sola *proposizione* dicendo: *tutte le corde del cembalo B, tranne la prima, sono discordanti dalla corda prima del cembalo A*; oppure dico, la prima corda del cembalo *A* non concorda che colla sola prima del cembalo *B*. Con questa semplice *proposizione* io effettivamente esprimo cinque

fatti, cinque rapporti e cinque giudizi diversi, uno affermativo e quattro negativi. Questa proposizione dunque inchiude una recapitolazione, un compendio e in fine esprime un *concetto di risultato comune e semplice*, il quale non si può confondere con veruno dei giudizi singolari prima emessi. Io prego il lettore a far punto su di questa osservazione. Procediamo oltre.

Fatto questo primo giro passo al secondo. Qui tocco la *seconda* corda del cembalo *A*, e ne paragono *successivamente* il suono con quello delle cinque corde del cembalo *B*, e lo trovo discordante con tutte. Ecco cinque altri giudizi singolari ed uniformi affermant tutti diversità. Questi cinque giudizi singolari, colle loro proposizioni rispettive, gli esprimo con una proposizione negativa, sola, semplice e comune, e dico: la seconda corda del cembalo *A* non *concorda* con veruna del cembalo *B*. Con questo metodo passo a confrontare le altre, e non trovo più consonanza. Io dunque conchiudo colla proposizione *generale*, che tutte le corde di questi due cembali, tranne le due prime, sono fra loro *discordanti*. Quest'ultimo giudizio *generale* e questa semplice proposizione, che cosa suppone veramente? Essa in primo

luogo suppone venticinque confronti che somministrano ventiquattro giudizi negativi ed uno affermativo. In secondo luogo suppone che questi venticinque giudizi *singolari*, siano stati convertiti in *cinque giudizi speciali*; e finalmente che questi cinque speciali, siano stati convertiti in un solo *generale*.

Tutte le cognizioni *generali dedotte* con senno, esigono questo processo, perocchè le condizioni di lui sono rese necessarie dai rapporti reali e costanti che passano fra la limitata nostra comprensione e gli oggetti delle nostre cognizioni. Dunque parmi di potere giustamente affermare che il *magistero fondamentale* del calcolo è sempre lo stesso, sia che si tratti di dedurre le quantità, sia che si tratti di *scoprire* per via di deduzione qualunque *altra cosa*. Passata la sfera dell'intuitivo simultaneo incomincia quella del calcolo. Qui l'*intuizione* non è ristretta sola alla sensazione, ma comprende anche quella che ci può essere somministrata dalla memoria o dalla fantasia.

24. Col calcolo scientifico noi vogliamo ottenere la *cognizion vera* delle cose. Dunque qualunque specie di calcolo forma un ramo della logica generale. La matematica dunque è un ramo di questa logica. Ecco perchè io

l'ho denominata la logica delle quantità. Scoprire un' incognita identità o diversità, *mediante un' identità* e diversità già conosciuta, ecco a che si riduce lo *spirito* eminente ed ultimo del *magistero* del calcolo, e di ogni minima mossa del medesimo. Nel calcolo aritmetico noi ci occupiamo a scoprire l'identità o la diversità della quantità fra più oggetti diversi o fra le parti di uno stesso oggetto. Nel geometrico noi ci estendiamo a determinare anche la situazione, le forme e l'andamento ec. di un dato soggetto. Amendue però questi calcoli non sono che parti dello stesso processo.

Ogni quantità considerata rispetto ad un'altra è identica o diversa. L'identità rispettiva non può avere che un solo concetto; questo è quello dell'eguaglianza. La diversità ne può avere due, e questi sono il *più* ed il *meno*. L'eguale e il disuguale non è che un verbo nostro. L'eguaglianza altro non è che l'identità di quantità applicata a due o più oggetti. Essa esprime un giudizio affermativo di questa identità. La disuguaglianza non è che l'affermazione della *differenza* di quantità fra due o più soggetti, e quindi la negazione di eguaglianza fra i medesimi.

L'eguaglianza e la disuguaglianza si pos-

sono esprimere anche con forme rispettivamente *negative*. Dico con *forme* e non con un *concetto negativo*, sì perchè io non conosco idee negative, e sì perchè l'animo nostro sente la diversità come sente l'identità. Io sento così positivamente la differenza fra il bianco e il rosso, come sento positivamente l'impressione del solo bianco e del solo rosso. Più ancora per affermare che il giglio è bianco *come* la neve, mi è necessaria l'idea di *amendue*, come per affermare che il giglio è *più o meno* bianco del narciso.

25. L'eguaglianza interviene perpetuamente nei nostri calcoli come v'interviene la differenza. In essi ora forma lo scopo delle nostre ricerche, ed ora forma uno dei mezzi per giungere alla scoperta che desideriamo. L'eguaglianza è nome d'*identità*, come la disuguaglianza è nome di *diversità*. La semplice *distinzione* d'una grandezza da un'altra non inchiude il concetto nè di eguaglianza nè di disuguaglianza, perchè due o più cose *distinte* possono essere sì eguali che disuguali, come possono essere simili o dissimili. La sola *distinzione* dunque può costituire una *circostanza*, ma non un elemento del calcolo.

L'*elemento* del calcolo matematico rigoroso

viene somministrato dal più e dal meno d'un dato oggetto o di più oggetti.

Quando annunziate un più od un meno, voi esprimete qualche cosa di più o di meno. Questa qualche cosa è veramente un'idea positiva che voi riferite ad un dato oggetto. Il nulla infatti non forma nè oggetto di più o di meno. Se non manca nulla ad una cosa, o se non tolgo o aggiungo nulla, non si verifica nè il più nè il meno. Il più e il meno dunque inchiudono l'idea di una quantità positiva che riferisco ad un oggetto pure positivo.

Questa relazione è o ipotetica o di fatto, assoluta o condizionata. Coll'ipotetica o condizionata altro non dico che se aggiungessi o togliessi tanto, ne seguirebbe la tal conseguenza. Per lo contrario colla relazione assoluta e di fatto, esprimo di aggiungere o levare, o che è stato aggiunto o levato, o che manca o che esiste una data quantità. Nella relazione condizionata altro non fo che paragonare, lasciando intatto il valore della cosa. Nell'assoluta per lo contrario altero effettivamente la quantità. Usando del più o del meno condizionato finisco coll'affermazione o negazione dell'eguaglianza, e collo stabilire una data proporzione o un dato va-

lore. Usando per lo contrario del più o del meno assoluto, io o aggiungo o tolgo una quantità al soggetto aumentato o diminuito. Colla prima maniera rimane tutto nel soggetto a cui applicai il più ed il meno. Colla seconda per lo contrario se ne cangia la dimensione; il valore, la proporzione ecc., ed esso non è più quello di prima. La verità dunque dei concetti esige due espressioni diverse per due operazioni cotanto fra loro diverse. Lasciando al più o meno assoluto i nomi di *più* e *meno*, io denominerei il condizionato colle parole di *se più* e *se meno* (1). Con questa distinzione io fo tosto comprendere se io annunzio uno stato della cosa,

(1) Io esprimerei, per esempio, il più o meno assoluto coi soliti segni di $+$ o di $-$. Il *semeno* o il *sepiù* io gli esprimerei nella seguente maniera $\sim$ $\vdash$. Il primo significherebbe *semeno*, il secondo *sepiù*. Spediti, semplici e analoghi mi pajono dessi, e però acconci per gli apprendenti. Evvi una terza maniera nella quale si impiega il più e meno, e questa è quella del *binomio*. Con questa non si accresce o detrae nulla, ma si segnano distintamente i *coefficienti* di un tutto semplice. Per questa espressione impiegherei i seguenti segni $\vdash \sim$ ovvero $\sim \vdash$.

o la mia operazione di aggiungere o di levare qualche cosa al soggetto, o se pure semplicemente *misuro* o *paragono* per giungere alla scoperta bramata.

26 Nell' esaminare le diverse quantità intervengono, secondo i casi, tanto i giudizj di *differenza assoluta*, quanto quelli di *distanza* maggiore o minore dall' eguaglianza. Queste idee sembrano compenstrate, ma pure sono diverse. La differenza quantitativa risulta dal rapporto immediato fra due grandezze. La distanza dalla eguaglianza risulta dal rapporto di queste grandezze collo stato di parità non esistente fra le medesime. Nel primo caso l' intelletto paragona solamente i due soggetti fra di loro. Nel secondo caso li paragona con un terzo archetipo, ossia colla forma pari, che risulterebbe togliendo qualche cosa all' una e dandola all' altra. La differenza dunque assoluta si potrebbe denominare *totale*. La distanza poi dall' eguaglianza dir si potrebbe *differenza media*. L' assoluta inchlude l' idea di *appartenenza* di un più ad un dato soggetto, e di mancanza rispettiva all' altro. La media per lo contrario involge il concetto d' una detrazione di questo di più dall' uno dei soggetti, e di *ripartimento* eguale di esso fra amendue.

In tutti i casi ne' quali si tratta di far intervenire gli *estremi* ed i *medi*; la distanza maggiore o minore dall'eguaglianza è così decisiva, che essa per sè sola sembra somministrare una positiva creazione o annientamento, quantunque il senso geometrico attesti il contrario. Col *trasportare* soltanto un atomo dall' uno all' altro medio per renderli ambi eguali, voi non diminuite in nulla la superficie del tutto; e pure nel prodotto della moltiplicazione avete un aumento. Io accenno questo fenomeno per far sentire quanto importi di distinguere la differenza assoluta dalla media. L' assoluta si può calcolare coll' uno; la media solamente col due. Ciò nasce dall' essenza stessa di relazione doppia e di partaggio.

27. Tutto questo avviene quando si tratta di differenze *determinate*. In queste ha propriamente luogo un *tanto di più* od un *tanto di meno*, e non un *meno* o un *più indefinito*. Il più o il meno *indefinito* si esprime colla *maggiorità* o *minorità* generica. Il maggiore o il minore in genere non vi dà di per sè l'idea di *quanto* un soggetto sia maggiore o minore di un altro, ma altro in sostanza non esprime che essi mancano di eguaglianza, ossia che sono disuguali.

Fra l'idea della maggioranza o minorità e l'idea di un dato valor numerico sta quella della *rispettiva grandezza*, e quindi quella delle *proporzioni*. La proporzione determinata non importa per sè stessa il concetto di un determinato valor intrinseco o inalterabile *aritmetico*, perocchè ad una grandezza determinata si possono dare tanti valori quante sono le parti nelle quali possiamo *dividerla*.

Se io figuro una superficie o una figura doppia, tripla o quadrippla di un'altra, io altro non fo che determinare un rapporto *estrinseco* fra di esse e nulla più. Quindi io fo astrazione sia dalla generazione, sia dai coefficienti dai quali può risultare, sia dal valore metrico interno che può o deve in tali casi ricevere, sia dalla attitudine sua ad unirsi con altri soggetti per costituire o una serie o un complesso, e così discorrendo. Il concetto di grandezza determinata segna i *limiti* rispettivi della quantità sia discreta, sia continua. Essa *di per sè* non presenta dati dimensionali particolari se non quando concorre con altre a formare un tutto.

28. Quando *paragonate* due quantità *disuguali*, che altro avviene nello spirito vostro? — Ciò che è pari, sia grande, sia piccolo, lo considerate come una *cosa sola*, e non

ponete mente fuorchè alla *disparità*. Allora è lo stesso paragonare due grandezze, per esempio, di quattro o cinque digiti, come paragonarne due di quattrocento o cinquecento. Ciò non è tutto. Questa operazione implica una *sottrazione* di puro paragone di tutta la grandezza pari di lei, ossia un *semeno*. Ma il concetto di questa grandezza rimane immedesimato coi soggetti paragonati, e serve di punto d'appoggio al vostro intelletto. Qui dunque la forma di eguaglianza astratta serve a determinare la differenza. Se dunque il sentimento della differenza è positivo, il mezzo di determinarne la misura viene somministrato solo dall'idea di eguaglianza. Ma questa non è che una *identità* ripetuta. Quest'identità deve investire un qualche oggetto, ossia consiste essenzialmente nel concetto di qualche oggetto geometrico. Dunque la cosa si risolve in ultima analisi nel concepire un soggetto geometrico come sta, e farlo servire di punto di paragone onde determinare la *diversità* di quantità con un altro, e con molti altri.

29. Qui facciamo punto. Fu detto di sopra e dimostrato che l'uno *metrico* generale non esiste nè può esistere, ma che egli è sempre *rispettivo*. Parimenti ogni grandezza così è

determinata e di un concetto così individuo ed immutabile, che non si può aggiungere o diminuir nulla, senza tramutarla in un'altra, e così senza distruggere la sua essenza. Dunque se venga o paragonata o accoppiata ad un'altra, nasceranno certi rapporti e non certi altri, certe convergenze o divergenze, e non altre, certe proprietà comuni, o certe opposizioni, e non altre. Questi rapporti saranno necessarij ed immutabili, quanto l'essenze stesse delle grandezze dalle quali emanano. Se dunque queste grandezze siano considerate come parti di un tutto, esse dovranno necessariamente somministrare un metro analogo ai rapporti che sostengono. La natura dunque di questo metro risulterà o semplice o composta a norma dei rapporti essenziali della posizione loro. Dunque ne viene il solenne ed inconcusso principio, che per calcolare con verità nei casi ne' quali queste grandezze essenzialmente diverse concorrono insieme, non si potrà far giuocare nè il piccolo nè il grande; ma si dovrà far uso soltanto dell'omogeneo.

Quest' omogeneità non consiste nè nell'unità polverizzata nè nell'estensione microscopica, ma nell'essenza composta secondo l'indole della figura. In geometria ciò vien con-

fermato anche dalla proposizione sopra dimostrata, che il principio della figura è la stessa figura. Ma la presente dimostrazione essendo tratta dalla natura comune dei concetti sì geometrici che aritmetici, ne viene che il principio suddetto dell' *omogeneità* è comune a tutta sorta di calcolo. Allora cessa l'uso *immoderato* dell' estrazione delle radici, allora vengono banditi gli infinitamente piccoli. Allora non si parla più di approssimazione. Allora non si tenta più di dividere la certezza come una focaccia, e di trarne risultati mostruosi; allora sottentra un'altra specie di calcolo analogo ai dettami della filosofia e all' andamento della natura.

30. Io non pretendo per questo che si debbano abolire i metodi attuali, ma solamente parmi che in certe parti si possa *illuminarli* di più, e quindi *reformarli* ed *unificarli*. Ciò può esser fatto soltanto usando del principio dell' *omogeneità*, il quale esige come condizione, che *a parte rei*, nulla venga da noi *alterato* nel concetto delle quantità impostate o derivate, e per parte del calcolatore la piena cognizione della posizione intiera della quantità e dei rapporti logici di lei. Voi mi direte che si sono fatte molte scoperte. Ed io vi rispondo domandandovi,

se tutte siano solide ; e quelle che sono solide , *nelle specie di casi di cui parlo* , non coincidano appunto senza saperlo col principio dell' omogeneità ? Niuna verità può fare i pugnì con un' altra , nè la verità matematica può venire in conflitto colla buona filosofia. Ora ditemi se questa possa ammettere le denominazioni di *calcolo infinitesimale* , di *infinitamente piccoli o grandi* , di *quantità aggiunte o neglette* , ed altre simili ? E quanto alla denominazione di *calcolo infinitesimale* credete voi che sia filosofica ? Chi chiamasse la *pittura arte delle ombre* userebbe egli d' una denominazione conveniente ? Lo stesso è in matematica coll' attribuire ad un calcolo il nome d' infinitesimale. Il calcolare importa discernere e paragonare. Ora sull' infinito si può forse esercitare il discernimento ? Dove non si discerne regnano le tenebre per noi. Attribuire dunque il titolo d' infinitesimale ad un calcolo è lo stesso che denominarlo *calcolo tenebroso* , *calcolo delle ombre*.

Questa denominazione impropria , la quale manifesta una pretesa incompetente allo spirito umano , pare derivare dal trascendentalismo mal inteso , del quale ho già parlato. Essa poi suppone che si possano oltrepassare certi limiti che la buona filosofia di-

mostra insormontabili , e che vi possa essere un' *essenziale* differenza fra il grande ed il piccolo.

Sappiate , dice l' inventore di questo calcolo , che i fondamenti della mia invenzione non sono rigorosamente dimostrati , ma sono *passabilmente veri* (1). Tutti piegano la fronte, malgrado le grida della filosofia e del buon senso. Così il Leone , il quale nel tempo che pioveva , e nell' atto che i suoi cortigiani grondavano d' acqua , avendo sostenuto che risplendeva il sole , i suoi cortigiani d' accordo proclamarono che il sole gli avea bagnati. Ma

(1) Il calcolo differenziale basato sopra gli altri principj (cioè diversi da quelli del Delagrangia) forma una scienza separata dall' algebra , giacchè in essa , quei principj non avvien mai che si incontrino. *Talvolta* questi principj dimandano che si accordi la sussistenza di cose le quali hanno in sè delle proprietà contrarie affatto alla geometrica evidenza e ad ogni comune concetto , e questi sono gli *infinitesimi* che or si prendono per *nulli* , ora per *quantità* di misura , che si confrontano con altre , e sopra le cui analogie ebbe a dire lo stesso Leibnizio (*Acta Eruditorum. Lipsiæ* 1712) che esse non sono vere ma *tolleranter veræ*. — Brunacci , Memoria premiata dall' accademia di scienze , lettere ed arti di Padova , capo III , § 28^a , pag. 23. Edizione di Zaunon Bettoni. Padova 1810.

per mia fè che cosa significa questo passabilmente vero, fuorchè un'asserzione non dimostrata? Ora un'asserzione non dimostrata può forse servir di fondamento ad una teoria che esige una rigorosa dimostrazione? La dimostrazione non ammette nè verità dubbie, nè verità passabili, ma accoglie soltanto un vero pieno ed un vero dimostrato. Da quando in qua la matematica, che appellasi la scienza eminentemente certa ed eminentemente dimostrata, deve riposare su basi *passabilmente vere*?

Questo è ancor nulla. Se taluno affermasse che il quadrato di un cateto può essere eguale al quadrato dell'ipotenusa, o che il cateto stesso può essere eguale all'ipotenusa, non direbbe forse una proposizione apertamente ed assolutamente *fulsa*? Voi lo convincereste di falsità sì colla dimostrazione della figura, e sì col tagliare una lamina ed un cartone, in modo che egli dovrebbe confessare la falsità palmare della sua proposizione. La verità della proposizione pitagorica è assoluta ed *universale*, perocchè in essa si prescinde dalla considerazione di qualunque divisione o proporzione *particolare* dei cateti o dei loro quadrati, e però per la sua vera universalità può sostenere il confronto della *dx* dei Leib-

uiziani. Basta aver delibato i primi elementi di geometria per essere intimamente convinti di questa universalità. Ora se contro l'universale verità ed evidenza del dogma pitagorico io volessi contrapporre i concipienti *tolleranter veri*, coi quali Leibnitz stesso denominò i fondamenti del suo calcolo, che cosa si direbbe di me? Dir si dovrebbe che i pensamenti *tolleranter veri* debbono cedere il passo agli *evidenter veri*; e che se i tolleranter veri ripugnassero agli evidenter veri, essi diverrebbero evidentemente falsi, per ciò stesso che gli altri fossero evidentemente veri.

Ora dico, sostengo e dimostro che il concetto fondamentale del calcolo di Leibnitz ripugna positivamente al dogma suddetto pitagorico; e però conchiudo essere il pensiero Leibniziano evidentemente e matematicamente falso. La prova di questa ripugnanza risulta dalla dimostrazione posta a piedi di questi discorsi.

Come mai un' impostura come questa ha potuto trovar seguaci in tanti uomini d'ingegno di tutti i paesi d'Europa? Come mai un fantasma, il quale comparve sul teatro matematico coperto non colle divise della evidenza, ma colle spoglie ingannevoli d'una

volgare fantasia, maritate col trascendentalismo e coi passi vacillanti del passabilmente vero, potè illudere cotanto da regnare sulle menti dei matematici, e resistere agli assalti del buon senso? Come mai anche in oggi egli estende la sua dominazione ed acquista campioni al suo partito? Forse sta scritto nei libri del fato, che anche il mondo matematico debba talvolta essere colpito da uno spirito di vertigine come il mondo civile? Vi avvisereste voi forse di dire che il dogma pitagorico è dogma *geometrico* e non *algoritmico*; che però non può colpire la massima del calcolo infinitesimale nel quale si fa uso di principj algoritmici? In questo caso io vi dimostrerei che il dogma pitagorico è eminentemente algoritmico, ed unicamente algoritmico, e versa intieramente sullo scopo unico d'ogni calcolo. E per verità il dogma pitagorico non determina egli il *valore* dei quadrati dei cateti rispetto al quadrato dell'ipotenusa in tutti i casi ne' quali i quadrati dei cateti o siano eguali fra di loro, o possano differire per qualunque quantità escogitabile? Ciò posto, domando io, la *valutazione* non è dessa lo scopo unico del calcolo? L'algoritmo non è forse il mezzo di questa valutazione? La *determinazione* del più,

del meno, dell' eguale, sia delle quantità *impostate*, sia delle *derivanti* o costanti o variabili, sia delle indicate, sia delle differenziali, non costituisce forse la funzione, anzi l'essenza propria dell' algoritmo? In esso si domanda forse di conoscere o quantità dubbie, o quantità insussistenti, o quantità false, o non piuttosto quantità certe, sussistenti o vere? Ora se la valutazione attribuita dall' algoritmo, passabilmente vero, ripugna colla valutazione evidentemente certa del dogma pitagorico, non si potrà sfuggire l'assurdo perchè cade sullo stesso soggetto e sull' identica *operazione*. Invano per tanto si avrebbe ricorso alla distinzione suddetta per sottrarre gli infinitesimi dall'anatema del buon senso, e invano gli Ercoli del calcolo potrebbero accorrere per impedir la caduta dell' edificio poggiato sopra i medesimi.

Mi direte che *non sempre* la massima del calcolo Leibniziano esige l'impiego di questi infinitesimi, e però che quel calcolo non resta colpito sempre dalla taccia dell' assurdo e della frode. A ciò rispondo che qui si cangia di quistione senza affievolire la mia dimostrazione. Io ho parlato del *modo praticato* degli infinitesimi nel calcolo, e non ho parlato del calcolo eseguito *senza* di essi. Ora

se mi parlate del calcolo in cui essi non intervengono, voi non mi parlate più del calcolo veramente infinitesimale, ma d'un'altra cosa; e però la vostra difesa cade su di un soggetto diverso. Allora il calcolo sublime altro non è che il calcolo naturale elevato a regole più generali e nulla più.

31. Affine però di togliere per sempre la sorgente primitiva di questo e di altri simili delirj, è d'uopo di avvertire che altro sono le considerazioni del *possibile fantastico*, ed altro le considerazioni del *possibile esistente*. Egli è metafisicamente possibile che esistano Pietro, Paolo e Giovanni; ma allorchè figurate Pietro esistente, egli è metafisicamente impossibile che desso sia nello stesso tempo Paolo e Giovanni. La *esistenza effettiva* della persona di Pietro rende metafisicamente impossibile ch'egli sia nello stesso tempo Paolo e Giovanni. Così dicasi delle quantità. Una grandezza è metafisicamente suscettibile di varj gradi di aumento o decremento; ma *posto in fatto* qualunque aumento o decremento escogitabile di lei, si esclude per ciò stesso l'*esistenza di fatto* di qualunque altro aumento o decremento meramente possibile, e per ciò stesso di qualunque altra possibile differenza, ragione, proporzione o rapporto

logico poggiato a termini diversi. Questa sentenza altro non è che una traduzione del principio stesso di contraddizione. Posto questo dato, ne viene che quando in fatto voi figurate che una quantità impostata riceve un dato aumento o decremento qualunque escogitabile, voi *escludete* per ciò stesso qualunque altro aumento o decremento metafisicamente possibile *diverso* da quello che voi figuraste, quando anche non sappiate o non esprimiate il valore di questo più o di questo meno. Allora il più o il meno figurato riesce necessariamente parte aliquota o non aliquota della quantità impostata. Potrà essere a voi *sconosciuto* il valore rispettivo di questa parte. Ma la ragione vi dice sempre che siccome dessa non può esistere e non esistere nello stesso tempo nè essere ad un sol tratto *identica e diversa*, così (quand'anche il di lei valore non sia da voi *conosciuto*), ciò non ostante dessa esclude la possibilità della coesistenza d' uno *stato diverso* da quello sotto del quale realmente esiste. Con ciò tutti gli altri stati metafisicamente escogitabili rimangono sepolti nel caos dell' idealismo, e non ha veramente luogo che quello stato solo, sotto il quale essa esiste. *Indefinito* dunque *a parte rei* non è nè può essere

questo stato; e però è logicamente assurdo il concetto di un infinito o indefinitamente piccolo *esistente*; sia ideale, sia reale.

Io sfido tutti i matematici a sovvertire la verità di questa osservazione; ma nello stesso tempo domando loro se sia vero o no che col loro *dx* non facciano intervenire e coesistere TUTTI gli stati metafisicamente possibili della piccolezza, nell'atto che non è possibile fuor che la esistenza di un *sol* di essi? se sia vero o no che confondono il mero stato *incognito* col possibile stato escogitabile di queste quantità? da questa confusione e da questo scambio sorge la mostruosa progenie degli infinitesimi e la illusoria fabbrica del calcolo relativo? Perchè io non conosco quanta sia l'altezza dei monti della luna, potrò io dunque supporla indefinita?

Voi mi parlate di *grandi* e di *piccoli* come di oggetti del *calcolo*. Voi dunque distinguete un grande ed un piccolo ad *uso pratico* del calcolo. Ma questo grande e questo piccolo vengono da voi assunti o in senso *unito* o in senso *diviso*. Se gli assumete in senso *unito*, è manifesto che dire e provar mi dovete in che consista il grande, e dove finisca per dar principio al piccolo. Se poi gli assumete in senso *diviso*, voi mi dovete dare un *criterio*

certo è stabile per distinguere il grande dal piccolo, perchè io possa indi attribuire ad ognuno il suo posto e la sua funzione. Senza di ciò io taglio un terzo di una montagna e gli pongo il nome d'infinitamente piccolo. Invano ricorrereste alla puerilità volgare del granello d'arena di Wolfio, perocchè questo stesso granello, o sotto al microscopio solare, o agli occhi d'un animale microscopico, pare o una massa di un metro di diametro o una montagna. Il globo terracqueo è un punto rispetto all'universo. Queste norme nel regno dell'*escogitabile* non possono aver luogo, e però conviene determinare il piccolo e il grande in via di *rapporto logico* assoluto.

Ora dico essere logicamente impossibile agli infinitesimalisti lo stabilire filosoficamente in che consista il grande e il piccolo, per ciò stesso che gli stabiliscono *indefiniti*, stantechè l'indefinito non ha confini. Dunque per essi è logicamente impossibile lo stabilire il fondamento primo esecutivo, ossia *pratico*, del calcolo dell'*escogitabile*. Dunque quand'anche egli non fosse logicamente assurdo e matematicamente falso, egli sarebbe *umanamente impraticabile*.

32. Lasciamo questi assurdi e proseguiamo.

Vi può esser forse un aspetto sotto del quale la massima del calcolo Leibniziano può essere accolta come vera, ma questo aspetto non può essere presentato che internandosi nei più reconditi misterj dell'algoritmo naturale, e non può essere annunziato colle forme assurde degli infinitesimi: Penetrando questi misterj si distingue il calcolo *coerente* dal calcolo *vero*, perocchè havvi una specie di calcolo, la bontà o inutilità del quale non può essere scoperta e verificata se non si sale alla massima sua fondamentale. Allora si esclude quello che non tiene conto della *diversità* originale ed essenziale degli elementi, e che tratta gli enti matematici sul letto, dirò così, di Procuste. Io non posso e non debbo entrare nell'esame di queste massime perchè dovrei dare un Trattato di aritmetica o di geometria invece di osservazioni generali sul primitivo insegnamento delle matematiche. Quindi non è mio disegno d'impugnare veruna costruzione *fondamentale* dei calcoli usati dai matematici. Ma altro è la *meccanica* del calcolo, ed altri sono i *principj filosofici* del medesimo. Altro è la *verità intrinseca* dell'operazione, ed altro è l'*espressione conveniente* della medesima. Ciò che ho annotato, parlando del calcolo sublime, versa

soltanto su l'abuso degli infiniti, e non percuote il *merito intrinseco* dello stesso.

Su questo merito, anche non conoscendolo, si può osservare ciò che deriva dai principj d'una solida filosofia, e può interessare la primitiva istruzione. E però, parlando del calcolo sublime, dico che se la *massima* di questo calcolo è giusta; essa deve essere stata tratta da un *fatto certo*, ed essere conforme a leggi perpetue già conosciute. Uno è il soggetto della scienza; e identiche sono le leggi dell'umano intelletto. Le diverse specie di calcolo non sono che diversi artificj per raggiungere i diversi concetti delle quantità: ma questi artificj non sono che modi diversi di queste leggi fondamentali. Per vedere il sole e la luna vi bastano gli occhi nudi; per vedere i satelliti di Giove e l'anello di Saturno bastano i telescopj ordinarij: per vedere Urano ed altri più lontani o più minuti oggetti occorre il telescopio di Herschel: ma per questo vengono forse alterate le leggi della luce o quelle dell'ottica? La massima dunque sulla quale è fondato il calcolo sublime, deve derivare da un *fatto certo*, primitivo, costante, e di una influenza generale. Questo fatto, lungi dal contrastare cogli altri, dovrà apparirci con-

cordante. Dunque tutte le spezie possibili di calcolo dovranno risentire la sua influenza, e però adattarsi ai rapporti che egli fa nascere. Dunque fino dai primordj della scienza egli influirà sui nostri concetti anche senza che ce ne avvediamo, e determinerà i nostri risultati di ragione. Quando lo vediamo alla scoperta, lo esprimiamo co' suoi lineamenti genuini. Quando all' opposto non facciamo che presentirlo o nol ravvisiamo che al favore di un languido barlume, noi gli prestiamo una forma confusa, lo rappresentiamo con divise non sue, e quel che è peggio, gli attribuiamo funzioni incompatibili colla di lui natura.

Io potrei recare in mezzo esempi nei quali celebri matematici fanno eseguire all'*infinitamente piccolo* le funzioni le più strane e le più assurde. Qua lo vedete far la funzione del matto del tarocco; là lo vedete far la figura d' un blictri, qua fa le funzioni dei maghi di Faraone, cioè cangia le curve in rette, e i segmenti in tangenti; là fa la funzione di giocoliere facendo sparire e comparire ciò che si vuole: talchè qualche gran maestro, invece di voler adattare i nostri concetti *distinti* a ciò che accade in natura, ha preteso che la natura non possa procedere

che secondo questi concetti (1). Io escirei dai limiti di questo scritto, e dovrei entrare a trattare di proposito del *tenore intrinseco* del calcolo sublime. Le mie ricerche sono rivolte sopra l'insegnamento primitivo delle matematiche, e però io non posso nè debbo chiamar ad esame se non quegli oggetti i quali vengono maneggiati, o che possono influire su tutto il sistema di questo insegnamento. Limitandomi dunque a questo solo ufficio io osservo che la massima fondamentale del vero calcolo sublime deve dirigere pur anche il calcolo primitivo matematico, ed anzi la massima del calcolo sublime deve essere in *sostanza* la *medesima* di quella del calcolo primitivo. Se nel calcolo sublime procedete colla coscienza di certe leggi generali della quantità, ciò non può indurre differenza fra i *risultati* del calcolo sublime e del primitivo. La soluzione particolare d'un problema se non vi presenta una formola ge-

(1) V. il II tomo della vecchia Enciclopedia all'articolo (se non m'inganno centre) di d'Alembert, nel quale parlando dell'azione centrifuga e centripeta, e dopo aver convertita la curva nei lati di un poligono, afferma che *un corpo NON PUÒ* seguire che la legge di questo concetto.

nerale, non solamente non lascia di essere vera quanto a' suoi risultati, ma fatta a dovere, vi presenta l'applicazione di una formola generale, benchè non conosciate ancora questa formola. Anzi a parlare con verità la formola detta generale non è vera se non in quanto inchiude virtualmente tutte le applicazioni particolari. Ma le soluzioni particolari precedono le formole generali. Il carattere poi di generalità di queste formole non può risultare che dalla sola relazione identica a *tutti* gli oggetti d'un dato genere.

33. Ora venendo al calcolo sublime io domando se sia stato mai dimostrato quale ne debba essere il vero metodo. Se io apro i libri di Leibnitz, di Newton e di Lagrangia e dei loro seguaci, io trovo essersi molto *calcolato* ma assai poco *ragionato*. Io trovo di più, che quel che si è fatto e si fa, riducesi più ad una data *forma di sperimenti* che ad una teoria ragionata dei principj della scienza. Mai si è sospettato che conveniva salire alle primitive nozioni ed alle primitive osservazioni per fondare il grandioso e nuovo edificio di questo calcolo. Si è pensato invece di poter fabbricare su i fondamenti vecchi senza accorgersi che questi non erano proporzionati alla nuova fabbrica. Il calcolo

sublime pertanto, invece di comparire a guisa di un lucido e compiuto sistema, ci si presenta come una specie di rivelazione che scende dalle nuvole, a cui conviene conformarsi quasi alla cieca, e contentarsi di alcuni aridi e mal digeriti motivi di credibilità. Questa rivelazione per altro fu tutt'altro che *immutabile* come pretendere si poteva. Le riforme introdotte dal Delagrangia e da altri matematici posteriori ci dimostrano pur troppo non essersi ancor raggiunto il *mezzo definitivo* che si domandava.

Ma dall'altra parte egli è vero che l'essenza del calcolo sta nel *metodo* di trovare e combinare quei rapporti della quantità, i quali sono valevoli a produrre la cognizione proposta come fine della ricerca. Questi rapporti risultano necessariamente dalla cognizione dell'indole *naturale*, e quindi dai caratteri completi della quantità. Ma attesa la natura semplicissima dei concetti della quantità questi caratteri sono identici sia nel calcolo primitivo, sia nel sublime. Dunque fermando l'attenzione su quelli che danno, dirò così, il tuono agli altri, e seguendone l'indicazione, si fa uso, anche senza saperlo, delle massime fondamentali del calcolo sublime.

Trovare questi rapporti *fondamentali* e *caratteristici* ed usarne a dovere, ecco in che consiste la differenza fra il metodo perfetto ed i metodi imperfetti. In ogni esame *particolare* questi rapporti si presentano. Una ricerca diligente ed un' *atteuzione* sagace li pone in evidenza. Trovati una volta in un caso particolare, voi li trovate anche negli altri casi, o almeno sapete *dove* dobbiate andare a rintracciarli. Il calcolo sublime pare che venga distinto dall' *algebrico* e dall' *aritmico* tanto per la sua *possanza* quanto per il *mezzo* che egli impiega. Per la sua *possanza* perchè egli versa sopra ogni sorta di grandezza sì *razionale* che *irrazionale*, sì *commensurabile* che *incommensurabile*, e si applica ad ogni oggetto nel quale *esefcitar* si può il *senso geometrico* e l' *aritmico*. Pel *mezzo* che impiega poi, perchè sembra assumere un *criterio universale* onde determinare sia le quantità ricercate, sia le forze, sia gli andamenti, sia le leggi ed ogni altro oggetto reperibile colla determinazione delle quantità. Ma questa *possanza* e questo *mezzo* risultar non possono fuorchè dall' *essenza* e da' rapporti intellettuali della quantità. Ciò non è tutto. Considerando più addentro le cose, si trova che la *possanza* del calcolo

non può risultare che dalla *potenza del mezzo*. Dunque il mezzo dovrà racchiudere in sè stesso la *virtù* di soddisfare alle ricerche che formano l'oggetto del calcolo. L'uomo non può variare i rapporti logici a suo beneplacito, ma egli è costretto a seguirli con quella *pienezza* e con quell'*ordine* che viene stabilito dalla natura stessa delle cose. Ogni calcolo è un processo logico più o meno lungo, più o meno complicato. Questo processo ha un principio, un mezzo, un fine; dunque egli ha un *ordine*, e quindi un'*unità* sistematica. Quest'*ordine* non è che un complesso di leggi logiche indeclinabili dalla potenza umana. Queste leggi sono dunque *anteriori* ad ogni arte, come le leggi della gravità e della solidità sono anteriori all'architettura. Queste leggi sono risultati dei rapporti reali delle quantità: questi rapporti poi sono determinati dalle essenze logiche e dallo stato rispettivo di queste essenze. Dunque le condizioni tutte del calcolo saranno così determinate, che l'uomo non potrà a suo beneplacito aggiungere, levare o negligenza nulla senza rendere imperfetta e quindi più o meno frustranea la sua operazione. Dunque le *regole* del calcolo non potranno essere che l'*espressione avvertita* delle

leggi naturali e necessarie derivanti dai concetti essenziali della quantità matematica. Dunque secondo la natura *primitiva* di queste essenze dovranno atteggiarsi anche le regole del calcolo. Se dunque queste essenze avranno certe leggi *comuni* e certe altre leggi *proprie*, ne dovrà seguire necessariamente un *metodo temperato* tutte le volte che queste essenze diverse entrano come termini in un dato processo logico. Dunque se in questi casi si volessero trattare queste essenze con un magistero identico ed *assoluto*, e si pretendesse nello stesso tempo di ottenere i risultati *proprij* dei termini *similari*, si pretenderebbe realmente una cosa incompetente e logicamente assurda. Ora sia che ignoriate la dissimiglianza essenziale e primitiva dei termini che maneggiate, sia che conoscendola voi li vogliate sottoporre alle leggi proprie dei simili, voi li trattate sempre con leggi *incompetenti* alla loro natura. Dunque ne deve necessariamente avvenire che voi non potrete mai ottenere con questo metodo gli stessi risultati che derivano dalle combinazioni e dalle analisi dei termini *similari*.

Posta una essenziale *dissimilianza* fra le grandezze, il supporre che sia possibile una *coincidenza di misura*, egli è supporre che il

diverso possa divenire identico, e che il no si possa tramutare in sì. L'impiccolimento è una illusione logica, la quale non può far cangiare l'indole essenziale d'una persona o di un ente matematico, ma anzi ne pone meglio alla scoperta il carattere specifico predominante. Nei minimi termini possibili appunto di queste persone si ravvisano le radici, dirò così, specifiche che danno il tuono ed imprimono il loro carattere su di tutto il complesso, ossia su tutta l'amplificazione del dato soggetto. La personalità della quantità deve dunque essere inviolabile al pari della di lei dimensione e del di lei valore, perocchè da questa personalità sorge in sostanza la dimensione o il valor proprio di lei. Questo è ancor poco. Se voi voleste prescindere dai tratti *caratteristici* delle grandezze, o tentaste di modificarli, oltrecchè *tentereste* una mostruosità, voi vi privereste dei veri dati logici per procedere oltre nel calcolo. Allora rassomiglireste a quel fanciullo che durando grave fatica ad imparare a memoria un passo, stracciò la pagina che lo conteneva.

Parimente se sbarazzando il calcolo da ogni considerazione d'infinitamente piccoli o di *evanescenti*, di limiti o di flussioni, lo ri-

ducete all'analisi *algebraica* delle quantità finite, voi vi appigliate ad uno strumento troppo *grossolano* e quindi imperfetto per l'opera da voi divisata. In che consiste di fatti in primo luogo quest'opera? Nel descrivere e valutare il *passaggio* di una o più quantità per differenti stati di grandezza, e i cangiamenti che ne risultano in altre quantità il valor delle quali dipende dal valor delle prime. Ciò posto, ne viene che il calcolo differenziale altro non è che una ricerca ragionata della vera e concreta storia naturale di questi *passaggi* e di questi cangiamenti. Ma la quantità matematica non ha nè due nature nè due progenie nè due aspetti naturali, ma un solo, semplice e costante il quale deve essere ravvisato *intero* per poter esprimere la storia fedele di lui. Dunque facendo uso di vedute o di leggi *generiche*, come di quelle dell'algebra, non si potranno ottenere che risultati puramente *generici*, e quindi incompleti per questa storia. Ogni grandezza è essenzialmente *finita*. Gli intervalli o i cangiamenti dunque saranno sempre finiti. Ma per ciò stesso che sono finiti e che sono *proprij* di quel *tal* grado e di quella tale posizione, non possono essere che puramente *particolari*. Dunque, dopo aver usato,

se così piace, dell'analisi algebrica, converrà sempre soggiungere un magistero *speciale* suggerito dai rapporti speciali del soggetto del quale voi fate la storia.

Io non nego che in matematica non si possano usare certi artificj per aiutare la vostra intelligenza. Ma altro è usare di questi artificj come di *mezzi secondarj* per giungere al *definitivo*, ed altro è riguardarli in se stessi come *definitivi*. Così analizzando soggetti complessi fra i quali non vi sia una essenziale *commensurabilità* e non offrano elementi simili, io accordo che si possa e si debba anche usare del metodo *univoco* proprio dei commensurabili e dei simili; ma dico nello stesso tempo che conviene *soggiungere* sempre il metodo competente e naturale richiesto dall'indole essenziale dei termini chiamati a paragone. Altro è la *coincidenza metrica* ed altro è la *convenienza in uno*. La prima può servir di *mezzo* ma non di *scopo* ultimo *universale* della scienza. La convenienza in uno si può verificare anche con elementi essenzialmente *dissimili* e con parti rispettivamente *incommensurabili*. La coincidenza metrica per lo contrario non esiste che fra i commensurabili, ed altro veramente non è che la stessa *commensu-*

racilità ridotta in atto pratico. Ma dire che una cosa è commensurabile, egli è lo stesso che dire che la parte aliquota dell'una è o può essere parte aliquota dell'altra e nulla più. Ora vi domando se questa proposizione forni lo scopo universale del calcolo?

Il calcolo del quale parlo qui, è quello che versa sulla quantità matematica speculativa, e che ha per oggetto di determinare tutte le affezioni e tutte le leggi di questa quantità. Esso abbraccia in conseguenza anche il calcolo *primitivo*, il quale nella sua particolarità non esclude veruna di queste affezioni e di queste leggi. Egli comincia coi commensurabili e finisce cogli incommensurabili. Egli rileva le leggi comuni a queste due specie di quantità, e si munisce sempre di ottimi *garanti* delle sue operazioni. Un calcolo di fatti senza *guarentigia* appena merita questo nome.

Il vero calcolo differenziale e integrale non si verifica e verificare non si può veramente che nel calcolo primitivo. Ivi solamente si presenta il soggetto vero, reale ed unico sul quale cader deve l'esame. Su di lui appunto l'attenzione esercita *partitamente* la sua attività, locchè fa col ministero del differenziale; indi *ricomponendo* i coefficienti scoperti.

definiti, giunge a ravvisare distintamente un tutto che prima comprendeva confuso, compatto o senza relazione finita, locchè fa appunto l'integrazione. Ma in tutto ciò vi sta sempre sotto il *soggetto proposto* presentato dalla natura, il quale è pur lo stesso di quello del calcolo primitivo. L'integrale e il differenziale non esprimono che due *funzioni logiche* le quali formano una parte sola del calcolo primitivo, e però non abbracciano tutti i rami del calcolo matematico.

La differenza dunque fra l'uno e l'altro non consiste che nel *mezzo logico* del quale si fa uso in amendue. Ma il mezzo del *sublime* non può essere che *figlio del primitivo*. Il sublime dunque deve ritornare a ricadere sul primitivo, e ricevere da lui la sua ultima conferma. Per quanto esatta sia una espressione *generica*, non sarà mai corrispondente al concetto *reale*, appunto perchè è generica. Coll'esprimere solamente il *numero* delle parti o le proporzioni di qualunque grandezza non annunziate l'indole o la *forma* delle medesime, talchè l'espressione numerica finita non è per se stessa *specificante* o qualificante. Così voi potete esprimere che una data figura sia maggiore, minore od eguale ad un'altra, senza che perciò sia *simile* ad

un'altra; parimenti potete esprimere un determinato numero di parti di un tutto senza che la loro forma sia simile alla forma del tutto. Il senso quindi *aritmetico solo* non può essere *definitivo* nel calcolo. Ma anche il geometrico unito all'aritmetico non può mai nè esaurire, nè imprigionare per sempre l'unità, ma solamente determinare certi *rapporti* della medesima. Dunque in ogni calcolo possibile rimaner deve sempre un certo *margin*e che non si potrà mai oltrepassare. Senza di ciò non potrebbe mai aver luogo la vera *unificazione* matematica, perchè mancherebbe il *centro multiforme* e perpetuo per il quale anche a nostra insaputa si effettua l'unificazione suddetta.

Fine del discorso secondo.

PROSPETTO

DEGLI ARGOMENTI DEL DISCORSO SECONDO.

1. Passaggio dalla contemplazione metafisica ed isolata, alla speciale e di fatto della quantità. Concetti nuovi e reali che ne nascono.
2. Necessità di questa contemplazione speciale e di fatto per ottenere la piena scienza ed il calcolo efficace. Indole e leggi della quantità di fatto.
3. Antichità dello studio sull' indole e le leggi proprie della quantità, sua interruzione. Necessità di ripigliarlo.
4. Come deve esser fatto questo studio.
5. Oggetto logico immediato di questo studio. Natura della quantità.
6. Mezzi e modi di questo studio. Uso del calcolo primitivo naturale distinto dal secondario artificiale. Oltre di rilevare i fenomeni della quantità, si deve far avvertire ai *movimenti* nostri interni.
7. Ordine delle ricerche sui fenomeni della quantità.
8. Distinzione della parte *ostensiva* dalla parte *operativa* della dottrina. Definizione generica del calcolo.
9. Perchè sia necessario il calcolo
10. Come nacque in prima il calcolo e si perfezionò.
11. Necessità dell' analisi filosofica del calcolo.
12. Necessità di conoscere ciò che si deve *omettere* e ciò che si deve *fare*. Esempio.
13. Dei *doveri negativi*; della loro cognizione.
14. Forza dei doveri negativi. Con quali principii debbono essere discussi e stabiliti
15. Primo dovere. Non confondere il sensibile fisico coll'escogitabile. Esempio.
16. Dovere fondamentale negativo nel calcolo degli escogitabili. Esempio.
17. Principio logico del detto dovere negativo.

18. Cautela filosofica conseguente.
 19. Di ciò che far si deve Prima avvertenza. Conoscere il perchè di quello che far si deve.
 20. Confutazione della massima dell' empirismo cieco.
 21. Cenno di una massima positivo-fondamentale per l' arte del calcolo di valutazione degli escogitabili.
 22. Dei concetti mentali che intervengono nel calcolo. Del concetto complessivo del medesimo.
 23. Del *magistero* logico del calcolo. Sua affinità col magistero generale scientifico. Esempio.
 24. *Spirito* eminente ed ultimo del magistero del calcolo.
 25. Dell' intervento delle idee di eguaglianza e di disuguaglianza.
 26. Distinzione fra la differenza assoluta e la distanza dell' eguaglianza.
 27. Del vario concetto del più e del meno che interviene nel calcolo.
 28. Del paragone dei disuguali, e di ciò che allora avviene nel nostro spirito.
 29. Mezzo conseguente di valutazione. Suo principio fondamentale logico ed unico: *Omogeneità*.
 30. Conseguente ripugnanza e falsità positiva matematica dell' algoritmo infinitesimale.
 31. Principio preservativo dagli errori e dalle frodi.
 32. Universalità d' una stessa legge segreta che presiede al calcolo.
 33. Condizione di ragione del calcolo universale.
-

DISCORSO TERZO.

*Dell' unificazione matematica
sì logica che morale.*

1. In due sensi si può prendere l'unificazione matematica. Il primo come *operazione di calcolo*; il secondo come *ordinamento della scienza in uno*. Presa come calcolo, tosto si distingue la *coacervazione* dall'unificazione, come si distingue un *mucchio* di pezzi d'una macchina dalla loro *compaginatura*. Altro è di fatti fornire aggregati, ed altro è unificare; altro è numerare e sommare, ed altro è porre in rapporto una quantità. La prima operazione, altro non considerando, non produce che una *collezione*, e non mai un' *unità complessiva*. Produrre quest'unità è opera appunto dell'unificazione. Essa importa che non solamente le parti stiano insieme, ma che vi stiano con tali rapporti da produrre un concetto così unico ed individuo, come quello che appartenere può ad ogni parte presa singolarmente.

2. Considerando le cose in una vaga possibilità, pare che l'unificazione non abbia confini, e si possa seguitare a unificare come si prosegue a numerare. Se qui distinguete

la pura *ampliamento* dall' unificazione , e l' unificazione primitiva, dai *periodi soli* della medesima , non pare che in matematica si possa ammettere un' indefinita unificazione di quantità nel senso di produrre un' unità veramente complessiva nella quale si trovi *varietà e continuità* accoppiata ad uno solo e individuo concetto. Imperocchè da una parte converrebbe che immensa fosse la *comprensione* umana , e dall'altra che i rapporti cospiranti delle quantità fossero pure indefiniti. Quando parlo di *comprensione* , io intendo non la sola facoltà di percepire e di combinare , ma quella di *abbracciare simultaneamente* molte cose distinte. La parola stessa di *comprendere* racchiude questo significato. Ora , lungi che noi ci possiamo vantare di questa immensa comprensione , ci dovremmo anzi lagnare d' una somma angustia. Quanto poi ai *rapporti cospiranti* della quantità , vale la stessa ragione sotto un altro aspetto ; perchè questi rapporti non sono che le *idee relative* dei nostri stessi concetti della quantità , nate dalle *leggi fondamentali* del nostro *discernimento*. Dico del discernimento ; perocchè i rapporti *indiscernibili* non possono formare materia di calcolo. Questo discernimento è tutto *relativo* alla *costituzione* attuale del nostro

essere, come l'*attitudine* d' un cembalo a dar suoni distinti, e quelle tali loro combinazioni e non altre, vien determinata dalla sua costruzione. Ora se in questo stato di cose tutto divien *finito* e conformato d' una data maniera, ne segue necessariamente che i *concetti* dell'*unificazione* saranno non solo per sè circoscritti, ma che non potranno eccedere un dato numero di variazioni.

3. L' unificazione appartiene al *sensu integrale* del quale abbiamo parlato da principio; e quindi essa è l' operazione la più *originaria* e la più *naturale* di tutte. L' unificazione dunque matematica pare ridotta soltanto a *collegare* i concetti del *sensu differenziale*, e trovare i *mezzi discernibili* coi quali far si può l' unificazione naturale. Ma il *sensu differenziale* non può raggiungere mai l' integrale. Dunque rimaner deve sempre un *margin*e dentro il quale eseguir si deve l' unificazione matematica. Questo *margin*e dovrà al nostro discernimento apparire come una caligine la quale limita il campo della luce intellettuale. Anche questo *margin*e quando è finito potrà servire al calcolo; ma ciò in diversa maniera: imperocchè avvi in matematica *un non so che*, il quale riesce principio e fine dei concetti successivi della quantità, e che dir non si

può essere egli stesso una data quantità. Egli non è nè lo spazio nè il tempo nè l'estensione nè l'unità metrica nè il numero, ma egli è un reale senso recondito dal quale sorgono rapporti aritmetici e geometrici determinati. Egli quindi non è nè un infinitamente grande o piccolo *immedesimo* colla sostanziale quantità *intesa*, ma è una cosa posta *fuori* di lei, e che fa sorgere varj rapporti con lei. Egli è nello stesso tempo variante ed unificante; continuo nella sua essenza e discreto ne' suoi effetti; esteso nei suoi progressi e perentorio ne' suoi limiti; diverso nelle sue forme e identico nella sua potenza; dilatato nel suo sviluppo e comprensivo nel suo concetto; egli è, per dirlo in breve, l'INDICE ULTIMO della nostra attuale intelligenza riguardante la quantità estesa. Usando d'una greca etimologia io appello questa specie di recondita potenza col nome di IMPLICITO POSOTICO dal nome greco ποσότης che corrisponde al latino *quantitas*. L'esistenza di questo implicito fu presentita da qualche profondo matematico, ma non fu *qualificata*; perocchè l'esistenza di una potenza occulta non può essere definita o contraddistinta se non mediante i suoi effetti. Così distinguiamo la forza motrice, la forza

di coesione, ed altre simili a noi sconosciute colle idee degli effetti che producono o che crediamo loro dovere attribuire. Se questi matematici avessero esplorati i fenomeni di fatto della quantità estesa, essi avrebbero scoperti questi effetti, e in conseguenza avrebbero indicati i caratteri *proprij* di questa potenza, e ne avrebbero espressa almeno l'essenza *nominale* nell'impotenza di assegnare la reale. Un solo di questi fenomeni fu da essi oscuramente presentito; e questo consiste nel sostenere il carattere di *termine* nascosto o di punto di paragone algoritmico, senza che a lei attribuire si possa il carattere positivo di quantità quale viene comunemente inteso. L'esistenza di questo principio occulto non può essere scoperta per via d'induzione, analizzando le quantità in *se stesse*, ma apparisce soltanto indirettamente come un fatto primitivo nello sviluppo progressivo e paragonato dei numeri naturali posti in un certo ordine. Ciò verrà fatto palese, almeno in parte, allorchè esibiremo l'alfabeto aritmetico e geometrico, il quale, secondo il nostro parere, servir dovrà di primo fondo del primitivo insegnamento delle matematiche. Ivi ci verrà fatto di mostrare che in virtù di questo *implicito* si fa nascere

una vera quantità *comparativa* simile alle altre quantità differenziali, la quale nella prima volta è *eguale* alla quantità esplicita impostata. Questa comparativa quantità non sorge dal paragone di *due* quantità *esplicite* impostate, ma bensì dalla relazione immediata d'una quantità esplicita col luogo dell'implicito. Questo luogo non entra nè punto nè poco come *elemento sostanziale* nel calcolo, e però non riceve nè aumento nè decremento nè stato positivo alcuno proprio della quantità. Egli forma il *tuono*, dirò così, decisivo del senso integrale.

4. Lo scambiare il concetto dell'*implicito* col noto concetto della *quantità*, o porre la quantità sostanziale al posto dell'implicito, fa nascere tutte le oscurità, tutti gli enigmi, tutti gli assurdi logici, de' quali viene accusata la matematica sublime. Così coll'attribuire ad un'immagine riflessa da uno specchio i caratteri materiali dell'oggetto presentato, fa nascere la falsa supposizione che esistano due masse concrete, nel mentre che non ne esiste che una sola. Viceversa col supporre che qualunque apparenza non possa nascere che dalla massa medesima presentata *direttamente* all'occhio, esclude la potenza reale dello specchio a provocare il paragone

delle identità distinte. Lo stesso dicasi in matematica. Ivi è del pari erroneo l'attribuire all'implicito i caratteri della quantità variabile conosciuta, ed il negare allo stesso qualunque virtù, od influenza nei nostri giudizi nel calcolo. Non si può dunque riguardar l'implicito nè come un *residuo indeterminato* della esplicita quantità nè come un *nulla*, ossia una *negazione assoluta di essere o di potenza*, ma conviene ammetterlo come una *virtù occulta residente in noi*, la quale per se influisce in alcuni giudizi comparativi, ne' quali non veggiamo il secondo termine del paragone vestito dal concetto di reale e nota quantità. Il fatto ci palesa l'esistenza d'una causa occulta che in dati luoghi fa sorgere una quantità di paragone esplicito. Questo stesso fatto poi ci fa toccar con mano che l'implicito non ha alcun carattere riconosciuto proprio delle quantità sostanziali, talchè egli non ci palesa altro che il suo *luogo*, e ci nasconde la sua persona. A torto pertanto si è preteso di vestirlo colle divise della quantità comunque escogitabile; ed a torto pur anche si è preteso di annientarlo o di privarlo di qualunque virtù. Fra questi due estremi hanno fin qui fluttuato i giudizi dei matematici, nel mentre pure che i

fatti primitivi dettano un concetto *intermedio*, il quale d'altronde si concilia colla ragione e colla esperienza del calcolo. Io mi riservo di allegare questi fatti dai quali sorge questo concetto *intermedio* fra il *discretivo esplicito* ed il *zero*. Il *discretivo esplicito* nasce per via di addizione o di sottrazione, o anche di segno *apposto da noi* fuori delle quantità impostate che formano il corpo da valutarsi. L'implicito per lo contrario sta nel fondo della nostra intelligenza, ed opera anche senza che noi lo vogliamo, e che noi ce ne avvegiamo.

Egli è un oracolo interiore, il quale, consultato da noi, pronuncia sempre risposte fedeli e veraci, e ci avvisa della posizione nella quale ci troviamo nel mondo geometrico ed aritmetico. Allorchè passeggiamo fra le file di una serie naturale di quadrati, egli ci avverte dove dobbiamo proseguire, dove arrestarci e dove rivolgere i nostri passi. Qua ci mostra la meta della coincidenza e dell'eguaglianza prodotta dallo sviluppo completo dell'unità complessiva naturale. Qui, ella ci dice, si compie il primo viaggio della ragione algoritmica; qui si consuma la prima evoluzione dell'unità logica complessiva: qui s'incomincia un altro periodo staccato il quale non racchiude più

la pienezza del primo. E quando eravamo per viaggio, se volevamo arrestarci a certe pause nelle quali incontravamo due termini massimi concorrenti, e un terzo concludente, tutti e tre perfettamente razionali, quest' oracolo ci avvertiva che lo sviluppo logico non era ancor compiuto, perchè ci mostrava mancare ancora l'interiore naturale coincidenza, nella quale non si verificava l' omogeneità unificante l'algoritmo.

Allorchè poi in mezzo alle file giungiamo alla fine del primo stadio integrale e differenziale, noi veggiamo sorgere il mezzo associante e conciliatore della prima parte sviluppata, onde unirvi un'altra parte a formare un tutto massimo di unificazione razionale geometrica ed aritmetica.

5. Nella unificazione poi della quale ci occupiamo in questo discorso, questa potenza *posotica* interviene precipuamente, non tanto per *collegare*, quanto per *limitare* i confini della unificazione medesima, e per far sentire eziandio come si possa accoppiare l'identità colla diversità.

L'impero del senso integrale è l'impero della stessa natura. Dunque vi avrà una unificazione *naturale* che si opererà in noi per una legge segreta, la quale agirà anche

all'insaputa nostra. Questa legge difatti si fa sentire così in tutti i passi fatti dal discernimento, che pare non potere l'intelletto nostro *riposare* finchè non abbia soddisfatto alle inchieste di lei. Questo sentimento naturale, costante, invincibile, riesce tanto più forte quanto è più viva la nostra curiosità, e quanto più una fantastica analogia gli presta un interesse estrinseco. Se voi percorrete la storia dello scibile e delle istituzioni che ne derivarono, voi, al lume di questo fatto, troverete la cagione di tante dottrine, di tante allegorie, di tante pratiche, di tante usanze ec. ec.

L'unificazione *artificiale* si può dunque considerare figlia della naturale e come rappresentante piccoli abbozzi grossolani della naturale, o dir meglio come esprimente *alcuni simboli* staccati della naturale. Ecco a che si riduce il valore anche della unificazione matematica considerata come operazione del calcolo.

6. Quest'ultima specie di unificazione non è legata nè alla forma apparente del simbolo nè all'espressione accidentale numerica attribuita da principio da noi, ma appartiene intieramente alla *ragione* intellettuale che risulta dai rapporti intrinseci ed essenziali

fra le parti e il tutto. Sia che voi tentiate di scoprire questi rapporti per discernere il valore e la connessione o la forza delle parti; sia che voi stesso abbiate per iscopo di comporre un tutto dotato di rigorosa unità, voi dovrete sempre attenervi alla *ragione* intellettuale suddetta. Voi potrete dunque per comodo del vostro discernimento *allargar* l'espressione, ma non *cangiare* giammai i rapporti della unificazione. Se cangiaste questi rapporti voi mutereste tutto il *corpo*, dirò così, dell'oggetto prima proposto.

In questa posizione dunque di cose col numerare non si unifica, ma si divide, e col far frazioni realmente non si divide, ma si moltiplica. Allorchè dunque si tratta dell'unificazione non si deve badare nè alla forma nè alla espressione materiale, ma bensì al *rapporto* che passa fra l'una e l'altra quantità. Quindi si può e molte volte si deve *tradurre* una figura o una espressione numerica in un'altra, salva l'essenza fondamentale dei termini da paragonarsi, ossia della *ragione* che passa fra l'uno e l'altro. Ciò si fa per porre in evidenza il rapporto medesimo e far sortire il mezzo conciliatore, il quale indichi la ragione unificante, ossia il rapporto coll'unità complessiva. Questo artificio, che

dir si potrebbe l'istanza della mente, forma appunto il merito dei buoni metodi. Trovare queste istanze, mostrare quando è d'uopo le seconde e le terze, segnare le loro traduzioni, fissare l'ultima più breve, ecco in che consiste l'essenza e il merito delle *formole* matematiche.

Dall'unione di queste formole nasce una specie di *topica matematica*, della quale si suole far uso nei casi occorrenti. In tutte le operazioni che formano questo calcolo unificante se aumentate o detraete senza toccare le ragioni fondamentali, voi non aumentate e non diminuite nulla, ma altro non fate che domandare il rapporto bramato. E quando stabilite i medj, voi realmente non fate entrare persone straniere, ma sostanzialmente non fate che unire le due ragioni in una terza, e vi servite poi di questa per legare gli estremi.

7. Nè la cosa, parlando filosoficamente, può procedere diversamente. Ogui ragione è un'idea per se unica, semplice, indivisibile. Quindi essa non si può dividere per ritrovare qualche cosa di mezzo. Dunque questo mezzo apparente non può essere che un composto di queste due ragioni, ossia dell'espressione di queste due ragioni per concorrere

in compagnia a far nascere l'unità. Questo composto forma per se stesso una cosa a se. Essa fa nascere nuovi rapporti cogli elementi suoi, e dal complesso di questi rapporti nasce l'unità che domandate. Dico l'unità e non l'uno, vale a dire quella unità complessiva, la quale comunica così a tutto l'aggregato la sua natura individua che non si può cangiare fuorchè distruggendo il concetto suo essenziale. Per la qual cosa in ultima analisi quelli che diconsi incommensurabili o irrazionali si potrebbero considerare come prodotti di razionali ridotti ad unità.

Qui si entra nello scabroso delle matematiche, il quale forse non riesce tale se non perchè non furono premesse le cognizioni necessarie sì di fatto che di ragione. Ho sentito valenti matematici a distinguermi la quantità *discreta* dalla *continua*, e lagnarsi della difficoltà di cogliere quest'ultima. Certamente semplicemente numerando essa non si coglie. Io voglio dire che usando dei metodi ordinarij proprj della sola quantità veramente discreta, deve sfuggirvi. Anzi dovrà avvenire talvolta, senza che ve ne avvediate, che v' incontriate in un nodo nel quale queste due specie di quantità sono venute ad incontrarsi; ed allora voi col metodo discre-

tivo vi trovate in imbarazzo. Ma se le cose fossero preparate a dovere, questi scontri non recherebbero sorpresa; o a dir meglio se avvenissero, ciò accadrebbe senza sorpresa e si saprebbe come rimediarvi.

8. Ma prescindendo da questi arcani altissimi della matematica, io fo riflettere che le altre cose riguardanti l'unificazione matematica si possono rendere intelligibili ed anzi visibili onde porre in guardia gli apprendenti a non confondere la numerazione o l'aggregazione coll'unificazione.

Ora che cosa praticato viene nelle nostre scuole? Lo dicano tutti coloro che hanno fatto il loro corso con una sincera applicazione. Credete voi forse di poter applicare il calcolo discretivo per indovinare le leggi della natura, e quindi soccorrere le arti? Quanto sarebbe delusa questa aspettazione! La natura, si suol dire, non va *per salti*, ma tutto procede per via d'una stretta gradazione. Da ciò fu dedotta la legge della *continuità*, la quale imperiosamente presiede a tutte le opere del mondo fisico e morale. Quella che dicesi *opportunità*, *maturità*, si può dire essere il complesso delle condizioni necessarie ad effettuare la legge della *continuità*. Quando questa legge non sia effettuata,

lo stato delle cose è puramente fattizio , e quindi o violento o debole , e sempre non durevole.

Ora ditemi di grazia nella *continuità* quali caratteri concorrono? Quello della varietà accoppiata all' unità. Ma la varietà suppone *differenza* fra le cose appellate varie. Dunque havvi una differenza che si può associare coll' unità. L' unità complessa inchiude appunto questi requisiti. Quest' unità complessa si verifica tanto nelle *forme* apparenti , quanto nelle *forze* operanti. Essa importa il concorso degli *estremi* e dei *medj* collegati per una specie di mutua transazione , nella quale le forme varie e le disuguali forze producano un solo ed individuo effetto. L' eccesso non è estremo , anzi è tanto opposto all' estremo , quanto la distruzione è opposta alla conservazione , la discordia all' armonia , la vita alla morte. L' estremo consiste in un *tale stato* , pel quale stando la diversità o la disuguaglianza rispettiva d' una cosa , essa può concorrere con altre a produrre lo stesso effetto. L' *eguaglianza* perfetta fra le forze porta l' equilibrio , il riposo ; e quindi mancanza di vita , di varietà e di progresso ; la *smodata sproporzione* di queste forze porta oppressione ed anche distruzione. Perchè dunque

siavi vita, conservazione e progresso debbono le forze disuguali stare fra di loro in una data proporzione. Se il maggior effetto nasce dove havvi il *maggior eccitamento* delle forze, questo maggior eccitamento non segue dove sono le più *grandiose* forze, ma dove queste forze stanno fra di loro in un rapporto che faccia succedere la *riazione* in conseguenza dell' azione. Ma se questo rapporto non è quello della eguaglianza perfetta, se non è quello della disuguaglianza smodata, resta dunque che sarà quello di una *disuguaglianza* dentro certi *limiti*. Il termine di *proporzione* di questa disuguaglianza appellar si potrebbe termine *temperante* e conciliante, o termine *moderatore*.

Questo termine moderatore riveste essenzialmente un concetto *semplice*, *univoco*, e nel tempo stesso *relativo*. Ma è logicamente impossibile il ricavare la nozione di questo termine dalla considerazione *isolata* dei due estremi, perchè eglino, considerati isolati, non offrono che i termini di una scambievole discordia. Dunque è assolutamente necessario di ripetere il concetto di questo termine da una considerazione *composta* di questi estremi con qualche altra cosa.

Questa considerazione composta non si può

fare che con una sola posizione , ossia solamente con un *dato stato* e non con altri , perocchè un più od un meno sia nelle forme , sia nelle forze non produce più l'effetto inteso. Dunque la possibilità di produrre questo effetto dipende da una posizione *unica* di tutto il complesso. Dunque essa appartiene così esclusivamente all'*unità* variata , continua e vitale , che non è possibile alla mente umana di ripeterne il concetto fuori che dalla medesima.

Dunque sarà impossibile col calcolo di enumerazione , di sovrapposizione , di aggregazione , di ampliazione , di sottrazione dei singolari estremi di stabilire il termine *moderatore e vivificante* , dirò così , di questa unità. Voi potrete bensì esaminare le parti di lei come si fa nell'anatomia e nella chimica ; ma il principio della organizzazione e della vita non si raggiunge.

9. Tutte queste considerazioni nascono dalla natura stessa del soggetto. Ora venendo al positivo , se esaminate la natura e l'arte voi troverete che la vita , la forza , l'armonia , la bellezza composta derivano appunto da una serie di *transazioni* fra due o più estremi accoppiati in un sol tutto , e che però involgono l'esistenza dei termini ora

esposti. Ciò posto, io domando se col solo calcolo discretivo propria delle cose *isolate* si possa determinare questa unità. Il calcolo comune alle cose *isolate* è insufficiente per ciò stesso che è *comune*. La qualità di comune toglie appunto quel che è necessario sia per iscoprire, sia, per formare l'unificazione, o almeno prescinde, sia dai rapporti, sia dalle regole speciali richieste dall'unificazione. Esaminando difatti l'indole di lui, si trova che non tien conto di questi rapporti e delle regole conseguenti, come palmarmente io potrei dimostrare esponendo la massima di questo calcolo. Dunque ne viene la necessaria conseguenza essere egli *insufficiente* tanto per esprimere, quanto per imitare l'unificazione e la continuità delle cose naturali. Dunque col calcolo solo discretivo la matematica non potrà certamente servir d'interprete della natura nè cogliere quegli oracoli i quali nello stato presente nostro essa ci può rivelare.

Pochi e simbolici sono questi oracoli in paragone di quelli che ad intelligenze superiori potrebbero essere comunicati. Ma se tralasciamo d'impetrar dalla natura quelle risposte che essa ci darebbe, la colpa è nostra; e però la maggiore ignoranza è so-

lamente imputabile a noi. Gli antichissimi coltivatori della scienza, con assai minori sussidj di uoi, erano più solleciti a stabilire e ad insegnare una matematica opportuna a questo intento. E quindi distinguendo, come i Pitagorici, l'unità dall'uno, si occupavano a rintracciare l'unità e a mostrare i mezzi di ritrovarla.

Nè qui obbiettar mi potreste che se queste cose sono vere in una astratta metafisica, o se sono buone per vaghe considerazioni morali, non valgono per la matematica, nella quale si tratta di un finito certo sul quale far riposare l'intelletto; imperocchè con questo obbietto fareste fare alla matematica un divorzio perpetuo dalle cose del mondo, per non costituirne che un oggetto di sterile curiosità. Allora non vi sarebbe male che la professione di questa scienza fosse ridotta ad una specie di monopolio esclusivo a' suoi coltivatori. Ma se da una parte è vero che la matematica servir deve a spiegare le opere della natura; se essa venir deve in ajuto della poteuza umana, e se dall'altra parte è pur vero che l'unità complessiva forma il punto massimo del vero stato delle cose; sarà pur vero che la ricerca di questo punto dovrà formare un oggetto massimo delle matematiche.

10. Io prescindo dalla questione se il calcolo dell' *unificazione* sia implicitamente o esplicitamente compreso in qualcheuno dei rami del calcolo in oggi praticato. Dirò solamente che in linea di fatto egli non parte dalla supposizione che il punto indivisibile generi la linea, che la linea generi la superficie, e la superficie il solido. Che egli nè menò pone verun infinitamente piccolo senza forma e senza virtù, il quale si possa maneggiare o espellere a piacere del calcolatore; ma che rispetta i rapporti della quantità e li tratta ognuno secondo il suo merito naturale. Dirò inoltre che in linea di risultato egli non pretende che in tutte le posizioni debba risultare l'espressione della perfetta eguaglianza nei prodotti degli estremi e dei medj, perchè sa che l'unità complessa abbraccia tanto i razionali quanto gli irrazionali, e sa pure che fra grandezze essenzialmente *diverse* poste in una maniera *non conforme* alla loro vera natura, il pretendere l'espressione della perfetta eguaglianza, come fra grandezze della stessa natura, è un assurdo logico. Dirò finalmente che altro è il paragone di *puro fatto* dell'eguaglianza e della disuguaglianza *individuale* delle parti, o dei coefficienti dell'unità complessa, ed altro è la loro *conve-*

nienza in uno, ossia la loro *attitudine* a costituire l'unità complessa nella quale concorrono i requisiti dell'unità, della varietà e della continuità. Certamente essere vi dovrà un *criterio* per distinguere quest'attitudine; e questo criterio dovrà in prima emergere dalle leggi conoscitive e certe del calcolo praticato: e però esige, come prima condizione, che mediante il calcolo praticato si faccia sorgere il *testimonio* assicurante della verità del calcolo di unificazione. Ma ottenuta questa testimonianza non ne viene la necessaria conseguenza che il calcolo di unificazione, nel quale solamente si tratta della *convenienza* in uno, debba essere nella sua ultima espressione perfettamente identica al calcolo discretivo o infimo o sublime praticato. Anzi il preteudere questa assoluta identità sarebbe un pretendere una cosa ripugnante alla ragione, perchè sarebbe un pretendere che ciò che è essenzialmente *diverso*, diventi *identico*. Per la qual cosa deve avvenire che trattando gli enti di diversa natura nella *maniera* univoca e nella forma perfettamente *eguale*, propria degli enti della stessa natura, dovrà nella prova degli estremi e dei mezzi sortire la *differenza nominale* del più e meno uno, per la ragione stessa che fra enti della stessa

natura sorte l'espressione zero , ossia il segno della perfetta eguaglianza.

Nominale io ho appellata questa differenza ; imperocchè analizzando profondamente la quantità estesa , e facendo uso di rigorose dimostrazioni geometriche ed aritmetiche, si trova infine che la quantità estesa si può figurare a guisa di un zodiaco , il quale abbia due limiti , ed una linea di divisione nel suo mezzo. Nel valutare questi limiti si verifica per necessità il più e meno uno nel prodotto degli estremi e dei medj tutte le volte che ambli estremi non sono quadrati aritmetici perfetti. Il più uno, quando emerge dalla moltiplicazione dei medj , può essere ridotto alla equazione zero , trasportando quest' uno ad uno de' medj medesimi. Quando poi il più uno sorge dalla moltiplicazione dei due estremi , non si può fare questo trasporto. In questo stato di cose trattandosi di stabilire valori superficiali, si debbono adoperare solamente elementi superficiali. *Estrinseca* riesce dunque la potenza quadrata dei contorni. Nella unificazione nella quale si tratta non di distruggere ma di conservare la quantità estesa sostanziale, quest' avvertenza è assolutamente necessaria. Dall' altra parte poi viene soddisfatto ad un gran principio filosofico qual

è quello che l'unità dell'esteso non viene mai dai nostri calcoli esaurita, ma più o meno limitata, talchè rimane sempre un fondo ineshausto di qualunque specie di unificazione sì fisica che intellettuale.

Per la qual cosa soggiungerò che il calcolo dell'unificazione si deve riguardare come il calcolo *eminentemente naturale*, non solamente perchè egli è il solo acconcio per avvicinarci un po' più alla cognizion delle leggi che reggono la natura esteriore, ma eziandio perchè indica, dirò così, i *limiti* ultimi dell'alleanza fra il nostro senso integrale e il differenziale, e ne esprime il simbolo il più chiaro possibile. Dico i *limiti* e non la linea, perocchè le produzioni integrali non furono, non sono e non saranno mai suscettibili d'una espressione sola, assoluta e perpetua. Ciò apparisce specialmente quando i così detti irrazionali o incommensurabili concorrono nella unificazione. Allora si presenta, dirò così, un emblema di tutto l'uomo interiore. Il cuore umano vuole spaziare in un indefinito libero, e l'intelletto ama di riposare su un finito certo. Così il senso integrale non vuole assoggettarsi ad espressioni univoche, e il differenziale non sa usare che espressioni finite.

Ma nella varietà stessa dell' espressione sta , dirò così , la vera sapienza e la fecondità del calcolo. Imperocchè lungi che questa varietà restringa la scienza , essa per lo contrario l' amplifica , e l' accomoda ai rapporti occulti che sosteniamo colla natura. Imperocchè in ogni posizione voi avete la conveniente espressione nata dai rapporti intrinseci delle quantità poste a paragone ; per cui sorgono altri enti , dei quali vi potrete prevalere nelle composizioni non solo della mente , ma eziandio della mano , come , per esempio , nelle architettoniche e nelle meccaniche.

11. La perfetta cognizione dei fondamenti e delle leggi di questo calcolo , detta anche le leggi del buon *metodo* particolare dell' insegnamento. Con essa si stabiliscono anticipatamente gli oggetti da osservare , e si traccia la via che gli apprendenti debbono percorrere. Nulla havvi d' isolato specialmente nelle matematiche , nelle quali la geometria e l' aritmetica generale formano tutto il corpo della scienza. Tutte le parti di questo corpo , come ognun sa , sono subordinate le une alle altre. E però ciò che vien dettato da principio , serve fino alla fine.

Ma se ciò che si pone al principio è insufficiente per quel che segue , come riuscir

potrà l'istruzione? Se, parlando in particolare dell'unificazione, gli apprendenti non possono ancor conoscere le leggi generali e farne applicazioni, in guisa di problemi, si può, anzi si deve ciò non ostante esercitarli su esempi particolari proporzionati alla loro capacità.

Dunque converrà che i metodi d'istruzione siano rivolti a questo punto come a compimento della scienza. Dunque difettosi saranno quei metodi nei quali questo soggetto non sia diligentemente trattato. Che cosa direste d'un Corso d'istruzione architettonica nel quale s'insegnasse come vada formata una porta, una finestra ed un pilastro ec., e che si tralasciasse di parlare della solidità, comodità ed armonia del tutto? Tale è l'istruzione matematica se ommette di proporsi come fine massimo lo studio dell'unità complessiva e della continuità. La scienza allora è fermata a mezza strada, e quel che è peggio, è interrotta colla ignoranza dello scopo il più importante al quale doveva essere diretta.

I dati per cogliere quest'unificazione si presenteranno naturalmente, mediante uno studio posato, graduale e ben simboleggiato degli enti geometrici ed aritmetici. Per la

qual cosa non avrete bisogno di andar a caso o di istituire penose disquisizioni, perchè la natura stessa vi guiderà per mano, e sembrerà dirvi: *Mirate, esaminate: là troverete quel che ricercate.* Se il modello dell'unificazione fosse un'invenzione artificiale, egli non avrebbe nè l'importanza nè l'influenza estesa della quale è dotato. Egli nè meno ispirerebbe quella fiducia nè si concilierebbe quell'adesione che è propria del linguaggio della natura. Ma questo modello non è punto artificiale, e da se stesso si mostra a chiunque sinceramente ed energicamente voglia ravvisarlo.

Energica, sincera e insieme temperata deve essere questa volontà, perocchè non deve volere spaziare in problemi *indeterminati*, i quali sembrano lusingare la nostra piccola capacità, ma seguire docilmente i suggerimenti che lo studio naturale va comunicando. Io non pretendo con questo che noi dobbiamo ripudiare l'eredità dei nostri maggiori, ma anzi pretendo che dobbiamo dargli un valore che senza questo studio essa non può acquistare. Le cognizioni difatti che abbiamo, trovano il loro posto, si collegano e si rassodano con questo studio. Quando la scienza tocca il suo apice, tutte le vere opi-

nioni si 'conciliano, e le erronee stesse si spogliano di quella larva o di quei ma-
camenti che le viziavano. Quel poco di vero
che contenevano, apparisce sotto il suo ge-
nuino aspetto, e concorre ad accrescere il
tesoro delle utili verità.

12. Io sono convinto, mi potrà dire taluno,
della immensa utilità che apportar potrebbe
alla scienza delle cose naturali ed alle arti
la teoria matematica dell' unificazione. Ma è
forse cosa che ridur si possa *ad effetto* certo,
stabile, solido ed universale? *Da punctum ubi
consistam, cælum terramque movebo*, diceva Ar-
chimede. Ma siccome il trovare questo luogo
che servisse di punto di appoggio, era cosa
impossibile ad un mortale abitatore della
terra, così l' opera di muover cielo e terra
rendevasi impossibile. Altro è la considera-
zione *specolativa* di un fine, ed altro è la
possibilità del conseguimento del medesimo.
Questa possibilità risulta soltanto dalla con-
siderazione delle forze e dei mezzi che stanno
in nostro potere. Non basta dunque presen-
tare l' idea della unificazione e farne presen-
tire i maravigliosi effetti che ne risultereb-
bero, ma fa d' uopo eziandio mostrarne a
noi la possibile esecuzione. Voi prima mi
dite che col puro calcolo discretivo usitato

dai matematici, non è possibile di effettuarla. Dunque bisogna inventare un'altra specie di calcolo che appellar dovrebbersi calcolo *sinottico*. Ora di questa specie di calcolo quale idea ne abbiamo noi? Nessuna e poi nessuna. Due specie di unificazione esister possono, come voi avete annotato sul principio. La prima risulta dal *complesso* sia naturale, sia artificiale di più *oggetti* dotati di quantità, atteggiati in modo da formare un'individua unità. La seconda risulta dal *collegamento* e dalla *cospirazione* delle varie parti, ossia dei varj *METODI particolari* dell'arte matematica, in modo da formare un albero sistematico ed individuo di *operazioni* ragionate. Con ciò si fa sorgere un tutto composto non solamente di funzioni e di parti *contigue*, ma di funzioni e di parti *coerenti* per *logiche affinità* e cospiranti tutte allo stesso intento. La prima specie di unificazione riguarda gli *oggetti* della nostra contemplazione, i quali per noi altro non sono che *immagini* dello stato o reale o ipotetico delle cose o dei simboli ne' quali ravvisiamo l'unità complessiva summentovata. La seconda specie riguarda le *operazioni* della nostra attività rivolta ad ottenere lo scopo propostoci, e quindi abbraccia il complesso delle *funzioni*

valevoli ad ottenere quest' intento. Ciò vien fatto col *magistero dell' arte*, il quale appunto merita un tal nome, perchè ordina e dirige la nostra potenza in una guisa *preconosciuta* efficace ad ottenere ciò che bramiamo. Per brevità dunque chiamar potremo la prima specie d' unificazione col nome di *unificazione sostanziale*; la seconda col nome di *unificazione magistrale*.

Ora parlando della possibilità della unificazione *sostanziale*, osservo che in essa non si potrebbe far uso del metodo conosciuto dei *limiti* o degli *indeterminati*, perchè questo metodo non ha un punto fisso a cui arrestarsi, nel mentre che voi volete dati *medj* e dati *estremi*, e per ciò stesso arrestate ad un dato segue il corso della limitazione. La limitazione, isolata per sè stessa, non conosce altri confini che quelli dell' escogitabile. Negli estremi per lo contrario havvi sempre un dato numeratore ed un dato denominatore o costanti o variabili. Nei *medj* poi esiste un rapporto determinato di ragione. Ma per ciò stesso che si parla di numeratori e di denominatori e di rapporti determinati, si esclude l' *indefinito*, e si costituisce il *definito*; e quel che è più, se lo atteggia ad ogni caso concreto nel quale si

tratta di raffigurare un tutto avente unità, varietà e continuità.

Ora vi domando come ciò sia fattibile in geometria a fronte del fatto notissimo, certo, costante ed universale, il quale ci manifesta che il commensurabile si alterna perpetuamente coll' incommensurabile, o si mescola in varie guise nei composti geometrici? Come ciò sarà fattibile in aritmetica a fronte dell' altro fatto egualmente noto dell' impossibilità di estrarre da tutti i numeri *intermedi* ai quadrati numerici le vere radici? Non è egli manifesto che sì in geometria che in aritmetica converrà almeno necessariamente ricorrere all' *approssimazione*, la quale involge nel suo supposto la posizione di un indefinito dal canto della quantità figurata, e di un processo indefinito di diminuzione della mente del calcolatore? Figuratevi pure limiti determinati, fra i quali poniate queste indefinite quantità. Esse saranno sempre un indefinito, cioè una *quantità non assoggettabile a porzioni aliquote comparate*, e quindi realmente incommensurabile, e non riducibile a *valor determinato*. Ma tostochè manca il *valore* domandato, non restiamo forse defraudati del nostro intento? Il calcolo allora non divien forse *nullo*? Qual è l'oggetto proprio de

calcolo, fuorchè il conseguimento di questo *valore* fatto con mezzi aritmetici e geometrici?

Sia pur vero che voi distinguiate la *coincidenza metrica* dalla *convenienza in uno*; sarà sempre vero che voi dovrete determinare se le parti della vostra unificazione abbiano l'*attitudine* di convenire in uno, e che dovrete accertarvene in una guisa irrefragabile. Ora in fatto di quantità ciò importa un'*estimazione*, una *valutazione*, e quindi una *misurazione* sì geometrica che aritmetica. Ora l'*indefinito*, l'*incommensurabile*, il mancante di radici razionali contrappone sempre un ostacolo insormontabile. Dunque anche nella *convenienza in uno*, nella quale si voglia dimostrare il concorso della unità, della varietà e della continuità, sorge quest' ostacolo. Egli in sostanza forma la pietra dello scandalo d' ogni calcolo sì generico che specifico, sì primitivo che secondario, sì infimo che sublime. Ora a fronte di tutto questo non dovrò io forse temere che l' unificazione *sostanziale* da voi concepita non rimanga che un puro desiderio?

Veniamo all' unificazione *magistrale*. Egli è di fatto che le diverse specie di calcolo conosciute fin qui non ci presentano quel magistero connesso, continuo, unico e soddi-

sfacente, cui dalla semplicità, unità e coerenza delle matematiche aspettar ci dovremmo. L'algebra, per esempio, delle quantità finite, che occupa il luogo di mezzo fra l'aritmetica comune e il calcolo sublime, nè soddisfa intieramente alla scienza nè serve a tutte le mire del calcolo sublime. Che l'algebra non soddisfi intieramente alla geometria è un fatto notorio ai nostri padri, e ne troviamo la confessione negli scritti di molti matematici. Che poi non serva a tutte le mire del calcolo sublime, questo è pure quanto vieue preteso da alcuni celebri matematici moderni. Tutti poi riconoscono una differenza fra il magistero dell'algebra suddetta e quello del calcolo sublime. L'algebra dunque, posta fra l'aritmetica comune ed il calcolo sublime, apparisce come un tronco staccato dalle sue radici e dai suoi rami superiori, nel mentre pure che il magistero di lei dovrebbe risultare coerente ed unificato così, da formare un tutto individuo, compaginato e continuo, mediante il quale l'umana ragione potesse salire, scendere ed aggirarsi per ogni dove colla scorta delle stesse massime di ragione e con modificazioni soltanto di un magistero unico ed universale.

Egli è vero che il calcolo per la sua data

è la più antica delle arti razionali, ed ha esistito e prima e senza della scrittura. Egli è vero che per la sua materia offre concetti più semplici di qualunque altra parte delle umane speculazioni; ma egli è vero del pari ch'egli in oggi non è assoggettato ad un magistero unico e continuo. Ora, senza di questo magistero, come sarà egli possibile a qualunque mente umana o di costruire o di raggiungere mediante il calcolo l'unificazione reale o ideale? Egli sarebbe lo stesso che voler salire alla cima di un muro o senza scale o con addentellati posti tratto tratto ad una distanza che non possa esser raggiunta dalla mano dell'uomo. Nelle cose che eseguir si debbono, non per un cieco empirismo, ma in conseguenza di principj ragionati, la *potenza* umana è talmente *subordinata* alla *scienza*, che egli è impossibile di effettuare colla mano ciò che la mente non dimostrò prima praticabile, e se non dopo che la ragione espressamente insegnò la *maniera* onde operare. Ciò posto, se manchiamo della unificazione *magistrale*, come compiere si potrà la *sostanziale*?

Due ostacoli pertanto si oppongono alla unificazione da voi concepita. Il primo sorge dagli oggetti i quali voi volete sottoporre,

o nei quali tentate di scoprire l'unificazione e le leggi dalle quali essa risulta. Il secondo sorge dagli *stromenti* o dai mezzi che in oggi possediamo per giungere a questo intento, sia che tenti di ottenerlo in via di *costruzione*, sia che tenti di ravvisarlo in via di semplice scoperta. Il primo ostacolo risulta dalla *incommensurabilità* degli elementi che concorrer debbono a formare un sol tutto dotato di unità, varietà e continuità. Il secondo ostacolo risulta dall'*insufficienza* riconosciuta dell'algoritmo algebrico, il quale se dentro certi limiti è riconosciuto sicuro, riesce impotente a raggiungere e a determinare le quantità tutte che concorrono nell'unificazione. Contro questi due ostacoli si è fino al dì d'oggi lottato invano. Que' sommi uomini i quali hanno tentato di abatterli, rassomigliano a quei flutti orgogliosi che vanno ad infrangersi a' piedi d'uno scoglio solido ed enorme.

13. Grave, lo confesso, è l'obbiezione espressa in questo discorso; e tanto più grave per me, quanto più mi sento mancante della forza di quei *genj*, i quali si sono studiati di vincere gli ostacoli ora accennati. Io quindi non farei altre parole sulla possibilità del calcolo di unificazione, se non

sentissi quanto ella sia decisiva per fissare le vere condizioni del perfetto insegnamento primitivo delle matematiche. Pare che l'insegnamento per se stesso possa essere fatto bene, sia che la scienza sia perfetta, sia ch'ella sia imperfetta. Insegnar bene quello che è stato scoperto, pare che soddisfi allo scopo di ogni insegnamento. Ma più addentro investigando le cose, io trovo che colla scienza imperfetta non si possono stabilire che metodi *imperfetti e puramente precarj*, e mai il metodo *perfetto e durevole* della data disciplina. La bontà d'un metodo d'insegnamento che prescinde dalla perfezione intrinseca della scienza o dell'arte, non è che bontà puramente *relativa* e non assoluta, *estrinseca* e non intrinseca. Un precettore potrà porre ordine, chiarezza e allettamento: ma se egli non conosce pienamente i caratteri, le parti, i principii e i nessi della cosa insegnata, sarà mai possibile che il suo metodo soddisfaccia allo scopo *logico* dell'insegnamento? Il metodo che io richieggo si è quello che riguarda la dottrina quale *può e deve essere*: perocchè da questo stato solo di lei si possono determinare le condizioni di ragione dei buoni metodj. Non esistono due intelligenze in noi nè due mondi fuori

di noi; e però non esistendo che un solo fatto, ed un solo vero, ed una sola mente; e non essendo possibile che questo vero sia inteso e sia bene esposto se TUTTO INTIERO non è compreso, ne viene di necessità che il perfetto metodo d'insegnamento è inseparabile dalla perfetta cognizione della cosa da insegnarsi. Ecco il perchè io mi sono avvisato di parlare dell'*unificazione*, la quale forma il fuoco centrale di tutta la scienza delle matematiche. Io non ho dissimulato nè a me stesso nè ad altri la difficoltà somma di questo argomento, come ognuno vede dal discorso in via di obbiezione ora presentato; ma nello stesso tempo parmi di aver fatto sentire che la riuscita del buon metodo, in quanto riguarda al *merito intrinseco* della scienza, dipende unicamente dalla cognizione delle leggi di questa unificazione.

Altro dunque non ci rimane che il vedere se la difficoltà opposta si possa superare. I due ostacoli sopra mentovati esistono pur troppo: ma sono essi forse insuperabili?

Se le discipline matematiche fossero state nella nostra età preordinate al lume d'una risplendente ed esatta filosofia; se tutti i recessi e i movimenti non meramente possibili, ma indicati della mente nostra nel va-

lutare la quantità estesa, fossero stati diligentemente esplorati e riferiti; se i lineamenti tutti dei nostri concetti fossero stati abilmente disceverati e compiutamente tratteggiati, io confesso che dovrei riguardare come disperata l'impresa di sciogliere l'opposta difficoltà. Ma egli è più che notorio che in oggi il paese delle matematiche si può riguardare come una terra non esplorata ancora dalla razional filosofia, benchè dalle officine di questa terra ci siano pervenuti tanti lavori sorprendenti per l'improba fatica che dovettero costare. Le pochissime cose dettate da un Condillac, da un Mejrán di Berlino e da un Limmer ecc., il silenzio assoluto e conservato dagli inventori dei calcoli superiori, e la stitichezza straordinaria degli espositori nella parte che precipuamente abbisognava di luce, ci lasciano ancora in un bujo, dal quale almeno non risulta la prova dell'assoluta impossibilità di sciogliere la difficoltà proposta. Una lusinga per tanto ancor ci rimane, la quale, se non possiamo elevare al grado della speranza, non ci getta almeno nella desolante certezza dell'inutilità di qualunque umano tentativo. Lodevole dunque sarà almeno il tentare, e se l'esito non corrisponde al desiderio, si potrà almeno finir col detto *in magnis voluisse sat est*.

Io non credo potersi affrontare addirittura la difficoltà, ma doversi prima preparare la strada per giungere alla soluzione della medesima. Così adoperando, la scienza vi guadagnerà sempre, quand' anche la soluzione non riuscisse. Cogli inutili tentativi di ritrovare il mezzo di convertir i metalli in oro o di fabbricare l'*elixir vitae* fu arricchita la farmacia di utili ritrovati. La soluzione della proposta difficoltà necessariamente importa di entrar a trattare di *proposito* di tutto il magistero del calcolo matematico in mira specialmente di assoggettare a valutazione quelle persone geometriche, le quali ci si presentano sotto un aspetto incommensurabile. Per questa sola qualità esse somministrano al nostro discernimento un margine deserto, oltre il quale incontrando ancora il commensurabile, nasce in noi l'idea di un passaggio, nel quale, non sentendo una distinta vibrazione numerica, siamo portati a qualificare questo tratto intermedio come infinito.

L'ostacolo di questo indefinito si affaccia fino dai *primordj* dello studio delle matematiche, e quindi deve esser tolto di mezzo fino nel primo periodo di questo studio. Ma in questo primo periodo non può aver luogo che quel calcolo che denominammo inizia-

tivo. Dunque col calcolo iniziativo si deve superare l'ostacolo dell'*intervallo indefinito* fra i veri commensurabili esplorati nel primitivo insegnamento.

Questo intervallo altro in sostanza non è nè può essere che un prodotto della fondamentale e nascosta unità intesa che si fa divenire misuratrice di se stessa. Ma in questa funzione la mente nostra è necessariamente soggetta alle leggi naturali e recondite dei concetti differenziali ed integrali, discreti e continui, variati ed uniformi, segregati e uniti, progressivi e periodici ec. ec. La *maniera* di superare quest'ostacolo deve soddisfare alle condizioni fondamentali fissate nella nostra introduzione; e però dovrà soddisfare tanto all'*indole propria* della materia da insegnarsi, quanto al *bisogno mentale* degli apprendenti.

Ma nello stato attuale del magistero matematico troviamo noi forse la *maniera* di superare col calcolo iniziativo il tenebroso intervallo dall'uno all'altro commensurabile? Non solamente non lo troviamo nel calcolo iniziativo, ma nemmeno nel sublime. Resta dunque che per ottener l'intento dell'ottimo insegnamento primitivo si dovrà perfezionare il *calcolo iniziativo* in modo da superare la

difficoltà dei così detti incommensurabili che si presentano entro la sfera del primo periodo della scienza. Entro questi confini soli limitar dunque si dovranno le ricerche onde ottenere il *calcolo primitivo di unificazione* contro la cui *assoluta possibilità* versa l'obbietto proposto.

Ognuno prevede che con questo perfezionamento noi innestiamo il calcolo algebrico sull'iniziativo, o a dir meglio noi diamo all'algebrico tutte le sue vere radici, e lo poniamo in grado di protendere i suoi rami superiori fino a quel segno che la mente umana può arrivare. Allora l'algebrico calcolo acquista una luce ed una possanza che egli attualmente non ha, e quindi tutto il magistero diviene coerente, compagiato e compiuto. Il calcolo algebrico si può considerare come occupante il posto *di mezzo* fra il calcolo iniziativo ed il sublime. In esso fanno capo e si sfogano tutti i passi dell'iniziativo, come da esso prende le sue mosse il sublime, o ritorna a lui o si ritorce in lui. La forza dei rapporti naturali è tale, che il calcolo stesso infinitesimale non si considera veramente compiuto se non quando risolvesi nel calcolo algebrico. « Il calcolo *infinitesimale* » (dice Carnot nella sua bella memoria

scritta sulla metafisica di questo calcolo) è un calcolo NON FINITO , o che non è compiuto ancora , perchè difatti , eseguita l'eliminazione delle quantità sussidiarie , egli cessa d'essere infinitesimale e diventa algebrico » (1).

14. Per la qual cosa col dare la vera logica del calcolo iniziativo si compie la logica di tutto il calcolo universale , ossia meglio si dà la prima ed unica logica fondamentale di tutto il calcolo matematico. Una logica incompleta non merita il nome di logica , avvegnachè essa non può soddisfare al suo intento. LOGICA , MAGISTERO e METAFISICA del calcolo (preso il nome di metafisica nel senso usitato dai matematici) significano la stessa cosa. Quella che i matematici chiamano *metafisica* di un calcolo , altro non è in sostanza che « il *magistero ragionato* , ossia il complesso delle *massime* di ragione direttrici delle ope-

(1) *Riflessioni di CANNOT sulla metafisica del calcolo infinitesimale* , tradotte con aggiunte del MARCHISINI, Pavia 1803. Tipografia Bolzani . § XXX, pag. 26. — Qui si aggiunge in nota. « Ognuno sa in fatti che un calcolo in cui entrino delle quantità *infinitesimali* , non si conta per terminato , e che non si valuta l'esattezza del risultato se non dal momento in cui le quantità infinitesimali sono intieramente eliminate ».

razioni del calcolo. » Le regole pratiche sono figlie di queste nozioni direttrici. L'effezione di queste regole forma il meccanismo del calcolo. Ma queste nozioni direttrici, quando siano vere e quindi proficue, che cosa possono essere in se stesse? altro che un' espressione di quelle leggi naturali le quali nascono dai concetti nostri riguardanti le quantità. Queste nozioni non sono dunque arbitrarie, ma sono *necessarie*. La forza dei rapporti che le dettarono, è tale, che la potenza della mente umana è obbligata ad ubbidire alla medesima. Tutte le costruzioni, tutte le trasformazioni, tutte le combinazioni nostre artificiali non sono dunque nè possono essere fuorchè mezzi per far sortire e rendere espliciti ed avvertiti quei rapporti, i quali stanno nascosti al nostro sguardo allorchè imprendiamo a valutare le grandezze, ossia i varj stati della quantità estesa. Trovare il mezzo termine della valutazione, ecco la formola generale della prima funzione del calcolo. Applicare questo mezzo termine al caso proposto, ecco la formola generale della seconda ed ultima funzione del medesimo. Ogni specie di calcolo sublime, medio ed infimo non può sottrarsi da queste due funzioni, perocchè esse altro non sono che un' applicazione delle leggi uni-

versali indeclinabili e perpetue dell'umana intelligenza.

Il *mezzo termine* altro in sostanza non è che l'espressione, ossia il concetto esplicito dei rapporti logici fra una cosa cognita ed un'altra incognita. Trovare un'identità o diversità incognita mediante una identità o diversità già conosciuta, ecco l'*ufficio* proprio ed essenziale del *mezzo termine*.

L'algoritmo altro non è che un *magistero di valutazione*. Il primo merito dunque di ogni algoritmo consisterà nell'insegnare come si possa trovare il *mezzo termine della valutazione*. Ma il *mezzo termine* è determinato dai rapporti essenziali logici, e talmente determinato, che egli non è soddisfacente se non quando comprende *tutti i rapporti cospiranti* a far nascere la valutazione. Dunque l'algoritmo è nullo quando non è *pienamente logico*, ossia quando il *mezzo termine* non è assolutamente *plenario*. Ora domando quali possano essere le forme del *mezzo termine* di valutazione, e quali *condizioni* racchiuder debba per essere *plenario*?

Il *mezzo termine* di cui parliamo, può avere ad un sol tratto *tre forme*. La prima appellar si può *mezzo termine dell'eguaglianza*, la seconda *mezzo termine della disuguaglianza*,

la terza mezzo termine dell' *unificazione*. Questi tre aspetti derivano tanto dalla posizione della quantità, quanto dalla operazione fondamentale del nostro intelletto. Il concetto di EGUAGLIANZA altro non è che quello di un' *identità ripetuta*. Esso non è che una idea ontologica. Esso non è che una mera *logia* e nulla più. Esso non è che quella espressione prodotta dal giudizio col quale pronunziamo *non esistere* differenza alcuna fra le quantità paragonate. Egli esprime adunque un *nulla assoluto differenziale*.

La *disuguaglianza* per lo contrario, oltre di essere una *logia*, involge nel suo concetto un *più di reale* quantità. Questo *più* è una vera *entità* essenzialmente indestruttibile, fino a che almeno si pensa che esista realimente. Il concetto dunque della *disuguaglianza* involge l'idea d'un *più reale* che si afferma esistere nella grandezza maggiore, e che non le può venir tolto senza distruggere la sua essenza. Dunque è così assurdo e ripugnante che il *più* possa coesistere collo stato di *eguaglianza* nello stesso soggetto, come è assurdo, ripugnante ed impossibile che l'idea dell'essere sia identica con quella del *nulla assoluto*.

Questa osservazione è decisiva per il ma-

neggio dei numeri pari e dispari ne quali si verifica appunto questo nulla e questo essere, e nei quali l'unità è in via di addizione o di sottrazione *discreta*, o in via di ampliamento o d'impiccolimento continuo e compenetrato, deve far variare totalmente il magistero del calcolo.

Qui considerando le cose in una vista universale, osservo che in qualunque calcolo adoperate certamente il *numero*, fosse pur anche il *metafisico*. Ma restringendomi al numero *matematico* col quale voi disegnate qualunque grandezza possibile, io vi domando, quando paragonate grandezze differenti, è vero o no che essenzialmente supponete nella grandezza maggiore un più qualunque *sostanziale*? Il salto dunque del più all'eguale mediante qualunque graduale *impiccolimento* sia di tutta la grandezza maggiore, sia del più che la rende maggiore, non si può fare assolutamente che *detraendo* la quantità differenziale, e così cangiando l'essenza stessa della grandezza maggiore. Dunque qualunque impiccolimento, sussistendo la grandezza sostanziale, altro non fa che rendere più compatto il concetto della distanza dall'eguaglianza e nulla più. La ragione e la proporzione fra le due grandezze rimarranno eternamente le

medesimo, e però fra di loro rimarrà eternamente il più o rispettivo meno sostanziale, dal quale sorge la ragione o la proporzione.

Che cosa dunque rimane? Altro non rimane che di trovare se siavi fra le due grandezze una *coincidenza metrica*, la quale quando è possibile rende le grandezze paragonate *commensurabili*, e quando poi è impossibile, le rende *incommensurabili*. Queste sono idee elementari primitive irrefragabili, universalissime, contro le quali non si può trovare eccezione veruna.

15. Procediamo oltre. La QUANTITA' ESTESA forma l'unico elemento del calcolo matematico. Nel calcolare dunque la quantità estesa sarà assolutamente assurdo e fraudolento partito il convertire l'esteso nell'inesistente, ossia l'esistente nel nulla reale ed assoluto. Più ancora, il più e il meno consisterà essenzialmente sempre in una quantità estesa qualunque. Dunque fra due grandezze *disuguali* non si potrà togliere la quantità differenziale per cui nasce quella data ragione o proporzione, senza distruggere l'essenza stessa delle grandezze paragonate. Dunque non si potrà nemmeno annientare l'UNO MISURATORE senza una vera frode, come non si potrà indefinitamente ampliare e diminuire

quest' uno senza cangiare i rapporti suoi colle grandezze misurate. Esso costituisce propriamente una *terza grandezza* che sostiene dati rapporti e non altri colle due grandezze impostate, di modo che per questa attitudine può divenire *mezzo di valutazione*, ossia formare termine di paragone fra le medesime. Allora, qualunque siasi, essa diviene *unità di valutazione*, e per ciò stesso mezzo termine logico del calcolo. Per quanto dunque impiccoliate quest' uno misuratore, esso riuscirà indestruttibile. Più ancora se voi lo impiccolite o l'annientate in una guisa continua, esso cangerà la sua ragione colle rispettive grandezze paragonate. A qualunque grado pertanto escogitabile voi portiate questo elemento, egli ne seguirà che tutte le proprietà reali ed *assolute essenziali* all' esteso si verificheranno in lui. Ma esso può essere misuratore coincidente o non coincidente. Nel primo caso si verifica la data relazione logica che vi abbisogna per la valutazione, e nel secondo questa relazione vi manca. *Estrinseca* e tutta *estrinseca* è questa relazione, perchè essa non toglie l' *essenza intrinseca* dell' esteso misuratore, ma solamente toglie la di lui *coincidenza di sovrapposizione*, o nulla più. Quando voi misurate con un

piede o con un braccio un contorno, quando pesate con oncie, o con carati o con granelli una massa, se non coincidono o non vi danno l'equilibrio perfetto, si toglie forse qualche cosa d'intrinseco al braccio, al piede, all' oncia che adoperate?

Ma voi non usate ed usar non potete che l'esteso escogitabile per misurar l'esteso escogitabile. Dunque il supporre o il fingere che fra due quantità escogitabili fra loro assolutamente incommensurabili si possa far nascere la coincidenza, è la più mostruosa delle assurdità che si possano immaginare, perchè egli è lo stesso che affermare e negare nello stesso tempo la coincidenza fra questi incommensurabili. Voi dite da una parte che essi sono incommensurabili, e per ciò stesso affermate l'impossibilità di coincidenza. Voi poi col fatto facendo approssimare continuamente la LINEA pretendete che possa accadere un' ultima ragione di eguaglianza, e per ciò stesso passate ad affermare la contraria possibilità di questa coincidenza. Come va, signori miei, questa faccenda?

Invano voi ricorrete alla distinzione delle quantità *poste* e delle *imprestate*, delle *indicate* e delle *sussidiarie*. La quantità *imprestata* altro non è nè può essere che il mezzo

termine lógico della valutazione. Ma questo mezzo termine da una parte racchiude in sè stesso tutte le *proprietà* assolute essenziali alla quantità estesa; e dall'altra sostiene tutti i rapporti essenziali d'una terza grandezza paragonata con due altre. Qui non v'è mezzo: o volete lasciar sussistere questo mezzo termine o no. Se lo lasciate sussistere, egli ne verrà che trattandosi di cose fra loro veramente incommensurabili, sarà IMPOTENTE a far nascere una coincidenza metrica; perocchè la parola *incommensurabile* significa appunto uno stato che rende IMPOSSIBILE qualunque mezzo termine di coincidenza. O voi non volete lasciar esistere e sussistere questo mezzo termine, ed allora è stravaganza e delirio il farne uso, e più assurdo poi di pretendere di aver ottenuto in fine col di lui mezzo la valutazione o la scoperta che ricercavate.

Lungi dunque che si possa riguardare questa quantità imprestata come *straniera* ed arbitraria, essa riesce per lo contrario logicamente associata pel motivo appunto che si fa servire come mezzo termine del calcolo. Essa non è e non può essere nemmeno arbitraria, perocchè senza di lei è impossibile di ottenere la cosa che domandate, e sol per

lei è possibile di ottenerla. O convien distruggere l'essenza della ragione umana e sovvertire la legge fondamentale del raziocinio, o convien concedere che la distinzione suddetta è illusoria per giustificare l'annientamento dell' *esteso* praticato nel calcolo infinitesimale ad oggetto di vincere l'ostacolo della incommensurabilità. Io non sono per condannare il metodo di eliminazione allorchè siete giunti all'ultimo punto, come quando avete misurato o pesato deponete il braccio o la bilancia; ma io non posso ammettere la funzione che fate eseguire all'uno misuratore DURANTE il processo e le operazioni incompetenti che esercitate su di lui. Io condanno la pretesa dell'arbitrario ed indefinito impicciolimento ed altrettali processi, *prima* di giungere all'ultima conclusione.

La quantità che dite *imprestata* è una *condizione necessaria* di qualunque problema atteso che senza di lei è *impossibile* la sua soluzione. La posizione dunque *logica* d'ogni algoritmo, come necessariamente richiede la posizione di questa terza quantità, così la fa riescire quantità indispensabile come le altre due che paragonate. Considerando le cose in una astrattissima ed ultima veduta, non si debbono riguardare come esistenti fuorchè

le grandezze *individuali*. Ma tosto chè le considerate come *oggetti* degli umani giudizj, voi siete obbligato di assoggettarle alle condizioni indispensabili a questi giudizj. Ora se questi giudizj esigono l'intervento d'un *terzo* estremo, egli ne viene che questo terzo estremo si dovrà porre come *requisito essenziale* del calcolo al pari degli altri due. L'algoritmo non è legge fisica delle cose, ma è *legge logica* della ragione umana. L'adempimento di questa legge forma appunto lo spirito eminente del magistero di valutazione. Ecco il vero punto di vista sotto il quale convien considerare ogni specie possibile di calcolo. Legge logica, legge mentale, legge interiore, legge nostra è quella che dà forma e virtù ad ogni considerazione aritmetica e geometrica. L'espressione dunque di questa legge costituirà l'unica formola generale d'ogni calcolo. L'esecuzione dunque *sola* di questa legge lo potrà rendere efficace. Dove pertanto mancheranno le condizioni di questa legge il calcolo riuscirà nullo. Dove poi ne mancherà una sola, esso riuscirà difettoso.

16. Accentrare i rapporti costituisce la condizione precipua e fondamentale di questa legge. Impiegare un' *espressione* comune forma la seconda condizione di questa legge. Quando

abbiamo scoperta l'eguaglianza, che cosa abbiamo noi in mano? fuorchè la cognizione dell'identità di quantità. Ma che cosa ne risulta da ciò per l'unificazione vitale? ancor nulla e meno di nulla. Abbiamo scoperto al più lo stato di equilibrio; abbiamo fissato il punto della morte. Questo punto adunque non può servire ad altro che a fissare i limiti di esclusione della vita, ma non mai le condizioni attive ed efficaci di questa vita. *Negativa* è dunque la norma dell'eguaglianza per la teoria dell'unificazione vitale. Essa non può divenir *positiva* se non quando si aggiunga la cognizione di una *data* quantità *sostanziale* che riesca simbolo d'una forza centrale appartenente non al vuoto dell'eguaglianza, ma residente nella reale sostanza con tali rapporti da congiungere la varietà colla unità e col progresso graduale.

L'eguaglianza dunque è nella teoria dell'unificazione *termine critico*, ma non *termine sostanziale*. Esso serve per limitare ma non per comporre. Esso è in una parola mezzo per confrontare, ma non elemento per costituire l'unità sostanziale complessiva.

Resterà dunque sempre a ritroyare l'elemento *sostanziale* della continuità e della unificazione. Ora domando io, dove dobbiamo

noi rintracciare questo *elemento*? È facile il prevedere la risposta. Noi lo dovremo rintracciare nelle VISCERE stesse dell' esteso ridotto alla più stretta ed uniforme unità, esplorandolo mercè un' altra unità di forma diversa, ma egualmente semplice e individua. Un esempio ci potrà servir di lume. Aprite un compasso *speculare* (1) sotto qualunque angolo vi piaccia. Se voi per caso v' incontrerete in un angolo che divida il circolo in tante parti aliquote, egli vi darà altrettante divisioni perfettamente eguali, e vi ripeterà altrettante volte l' oggetto unico presentato, computando anche l' oggetto reale. Allorchè poi l' apertura di detto compasso non dia un angolo dividente aliquoto, egli ripeterà alcune volte l' arco segnato, e vi darà condensato il residuo che sopravanza a pareggiare l' eguaglianza degli archi tagliati. Lo stesso potete fare anche con un circolo descritto sulla carta. Posto questo fenomeno, qual è la conseguenza che ne deriva? Che vi sono divisioni del contorno circolare, le

(1) Questo compasso speculare è formato da due lastre di specchio che si aprono e chiudono a guisa di compasso.

quali ripartir lo possono in tante parti aliquote, e ve ne sono alcune altre le quali non servono a questo fine. Ma dacchè derivar può questo fatto, se non che dalla *natura intima* e recondita della forma circolare, la quale riesce suscettibile dell' identità o non identità ripetuta di una data dimensione delle sue parti? Io non voglio ora procedere più addentro a squittinare la natura ed i rapporti di questo fatto. Mi basti di averlo accennato per formarne oggetto di meditazione.

Ora posta questa proprietà naturale di questa forma estesa, non è forse chiaro che essa imporrà alcune *leggi necessarie* alla nostra ragione tutte le volte che assumeremo questa forma o come criterio di eguaglianza o come associata nei procedimenti del nostro calcolo? Non è egli chiaro che la forma circolare ci rileverà molti misteri della quantità estesa, semplice, uniforme, paragonata coi rettilinei? Ora se colla *unità* ci presentasse accoppiata *la varietà e la continuità*, non dovremo noi forse accogliere come una specie di oracoli tutte le indicazioni che nei varj stati della quantità egli fosse per manifestare? Ecco ciò che io prego di avvertire come un punto d'insegnamento primitivo delle matematiche, e come un lume decisivo per la geometria di valutazione.

Ritrovare l' *elemento sostanziale* della *contiguità* e della *unificazione*, ecco ciò che resta a fare alla matematica per compiere il calcolo sinottico. A scanso di equivoci e di assurdi che si possono insinuare colla influenza d' uno stolido trascendentalismo, io prego di distinguere la *contiguità* dalla *continuità*. La *contiguità* astratta nel regime della quantità escogitabile è una parola vuota di senso, o almeno un' idea priva di qualunque virtù algoritmica. La *contiguità* viene espressa con punti estesi o non estesi, i quali si *toccano immediatamente*. La *continuità* per lo contrario è quella ragione logica, la quale fa che una grandezza passi successivamente per diversi stati d' incremento o di decremento senza interrompere o violare i rapporti dell' unità imperante che presiede a questi stati diversi, e però salva tutti i riguardi delle affinità indotte dalla potenza predominante nascosta. La *contiguità* è un' idea materiale o puerile dalla quale non si può ricavare alcuna legge di ragione. La *continuità* all' opposto forma una condizione primaria del calcolo di unificazione.

Ritenuta ferma questa distinzione, io insisto di nuovo sulla ricerca dell' *elemento sostanziale* della *continuità*. Qui, come ognun

sente, trattasi una quistione aritmetica, geometrica, psicologica, o a dir meglio la quistione del fondamento primitivo logico della valutazione della quantità *continua* e dell'unità complessiva. Quest'elemento sarà certamente *omogeneo* agli stati diversi delle quantità che possono cospirare a costituire l'unità complessa.

Unico dunque ed uniforme essere non potrà in se stesso, ma sarà *variato* secondo la natura delle diverse quantità alle quali dovrà servir di mezzo termine. Poniamo anche che a guisa di un numeratore frazionale si potesse esprimere, e che *identica* fosse la espressione, sarebbe sempre vero che il corrispondente denominatore cangerebbe necessariamente per ciò stesso che il numeratore fosse costante, e che il corpo della grandezza andasse variando. Ciò che caratterizza il valor d'un esteso non è l'espressione singolare o letterale, ma bensì il rapporto proporzionale delle grandezze paragonate. Questo è ancor nulla. Dopo reiterati e certissimi esperimenti, e dopo la considerazione della legge fondamentale dell'umana ragione, si trova che l'*elemento di continuità* non può venir somministrato che dal fondo stesso dell'unità *complessiva* stret-

tamente tale quale fu da noi definita. Questi esperimenti di fatto e questa legge di ragione ci accertano in una guisa indubitata che in ogni nostro calcolo intervengono costantemente i tre concetti dell' *uno*, del *più* e del *complessivo*, in una maniera così associata che, posto il *più*, non si può respingere l'impressione del *complessivo*. Il pari e il dispari aritmetico non sono che mere *circostanze* di questo fatto primitivo. In forza di questa legge ne viene che il *COMPLESSIVO* o aritmetico o geometrico deve necessariamente *da se stesso* e per una suprema necessità indicare l'elemento proprio della continuità tutte le volte che il calcolo parziale *discreativo* maneggia grandezze, dalle quali con coefficienti puramente razionali e quadrati non può emergere la quantità necessaria a convenire in un sol concetto *complessivo*. Questo fenomeno viene posto in evidenza anche usando della più rigorosa geometria di proporzione.

Qui per l'appunto si tocca il vero punto di contatto, o direi meglio, il nodo vero di connessione logica fra la geometria delle proporzioni distinte e quella delle proporzioni *associate*. Allora questa geometria unisce i suoi rami e diventa geometria di *valutazione*.

17. In questa geometria conviene formarsi una ben chiara nozione della *commensurabilità* ed *incommensurabilità*, e delle diverse idee che questi nomi traggono seco. Altro è l'*incommensurabilità lineare* ed altro è la *superficiale*. La lineare si verifica allorquando paragonando due linee fra di loro, mediante una divisione qualunque sia dell'una sia dell'altra, non potete trovar mai una coincidenza perfetta, ma vi sopravanza sempre qualche cosa. L'*incommensurabilità superficiale* si verifica allorquando, fatta astrazione dalla dimensione particolare del contorno, e considerando la pura superficie, voi non potete ritrovare mai coincidenza fra gli elementi estesi nei quali potete figurare divisa l'area d'una data figura.

La *commensurabilità superficiale* si può spesso accoppiare colla *incommensurabilità lineare*. Tagliate un quadrato per mezzo della diagonale; voi avrete due triangoli rettangoli isosceli. Pigliate uno di questi triangoli, voi avrete nei due lati di questo triangolo due cateti perfettamente eguali, e nella diagonale avrete l'ipotenusa rispettiva. È noto che il rapporto *lineare* fra la pura diagonale e il lato del quadrato non si può definire, e quindi sono rispettivamente *incommensurabili*.

Ma malgrado ciò non è forse vero che voi potete affermare che l'area del quadrato della diagonale è *doppia* di quella di uno dei lati? Questa proposizione che cosa è in se stessa, fuorchè una valutazione *superficiale*? Altro esempio. Descrivete un triangolo equilatero. Dal vertice di lui calate una perpendicolare sulla base. Voi troverete che il quadrato di questo perpendicolo sta al quadrato del lato come tre a quattro, ossia ch'egli ha una superficie minore di un $\frac{1}{4}$ di quella del quadrato del lato. Questo perpendicolo adunque è *linearmente* incommensurabile, rispetto al lato, perchè non esiste un numero che, moltiplicato per se stesso, vi dia per prodotto il numero tre: ma ad un tempo stesso questa incommensurabilità lineare non v'impedisce di stabilire il rapporto superficiale di tre a quattro.

Questa specie di *commensurabilità superficiale*, accoppiata alla incommensurabilità lineare, si verifica in tutte le gradazioni *intermedie* fra le radici perfettamente quadranti. Il primo e massimo problema della geometria di valutazione consiste nell'assegnare la *legge naturale* colla quale dall'unità si passa alla pluralità, e così, per esempio, come dalla quarta parte d'un quadrato si passa alla sua

metà. Conosciuta la legge *naturale* ed intima dell' *ampliamento continua*, si conosce pur anche quella della *menomazione*. La soluzione di questo primo problema importa di non scambiare i modi diversi di *misurare*, e molto più esclude la pretesa d'impiegare un modo solo, ed esclude pure l'uso universale di estrarre radici aritmetiche dove esister non possono siffatte radici. La *misurazione lineare univoca* non può convenire che a grandezze superficiali per ogni parte *eguali* e perfettamente *simili* all' uno misuratore assunto. Per ben intendere tutto questo io fo osservare che altro è la *potenza* ed altro la *dimensione* di una linea. La *potenza* di una linea altro non è che la espressione relativa alla grandezza del quadrato *geometrico* che descrivere si può su *tutta una data linea* e nulla più. La *dimensione* della linea altro non è che l'espressione del numero delle *parti* nelle quali un dato contorno o una data parte di esso si considera *diviso*. Dico un *contorno*, perocchè la linea astratta fisicamente non esiste nè può esistere. La linea reale non è nè può essere che l'*estremità* della superficie; e per ciò stesso altro non è che la superficie stessa considerata nella sola sua *estremità*, come fu già dimostrato nel di-

scorso primo. Dico poi che la *dimensione* non è che l'espressione numerica, o dirò meglio, altro non è che il *concetto* stesso complessivo del *numero* di queste parti. La *dimensione* dunque è cosa della nostra intelligenza, e non è proprietà dell'esteso. Essa è una *logia applicata* e non un'affezione reale dell'esteso. Ad una data area identica voi potete applicare tutte le *divisioni* che a voi piace, senza che si caugi lo stato dell'esteso. La *dimensione* dunque è cosa puramente mentale, nostra, e nulla più.

Passiamo alla *potenza* della linea. La sua significazione fu da me legata al concetto di un quadrato *geometrico*. Dico d'un quadrato *geometrico* per indicare la *forma* sola della figura estesa, indicata da tutta una data linea, prescindendo dalla considerazione se questo quadrato sia o non sia anche quadrato aritmetico. Per quadrato *aritmetico* intendo il prodotto di un dato numero di unità *identiche* moltiplicato per sè stesso. Il quadrato *aritmetico* appartiene al numero *metafisico* distinto dal numero *matematico*. Il numero matematico porta con se l'idea di estensione, perocchè la quantità estesa forma l'oggetto delle matematiche. La forma quadrata estesa è per finzione sola quadrato

aritmetico. Essa è tale sol quando un lato del quadrato viene da noi diviso in tante parti eguali. Allora per l'identità dei lati e degli angoli la somma delle parti è identica col prodotto della radice moltiplicata per se stessa.

La *dimensione lineare* o è assoluta o è comparativa. L'*assoluta* si verifica allorchè io divido un dato lato di un esteso in date parti, senza considerare se queste parti possano o non possano essere o *aliquote* o *coincidenti* colle parti del contorno d' un' altra grandezza. La *comparativa* per lo contrario è quella la quale si serve dell' uno misuratore d' una data linea appartenente ad una grandezza, per misurare e valutare la linea di un' altra. Questa dimensione si dovrebbe appellare col nome di *commensurazione*, perocchè essa piglia da una data lunghezza l' unità sua dimenziente per farla servire di unità dimenziente di un' altra lunghezza.

Prima che colla mente o colla mano io divida una linea in parti identiche od aliquote per far nascere il numero ed il quadrato aritmetico, si può a questa linea associare l' idea di potenza *univoca* qual è appunto l' unità estesa di un quadrato geometrico, al quale la linea serve di limite o d' indicatore. Così, per esempio, come mi

figuro un' ipotenusa della potenza di 50 , mi posso figurare i cateti della potenza 25 senza pensare che questi cateti possono essere divisi in cinque parti , l' una delle quali non può essere mai aliquota dell' ipotenusa. Finchè considero un quadrato geometrico *per se solo* , qualunque ne sia l' ampiezza o la piccolezza , io posso dividerne il contorno in quante parti piace a me. Ma allorchè lo *confronto* con un altro d' una *diversa* ampiezza. potrò io più pretendere che la parte aliquota dell' uno sia anche aliquota dell' altro ? Tutto ciò che in teoria generale io posso stabilire , si è che dividendo amendue questi quadrati in tante parti di numero *eguali* , ogni singola parte dell' una starà ad ogni singola parte dell' altra come l' un tutto sta all' altro tutto. *Proporzionali* dunque solamente risulteranno queste parti e non *comparativamente* aliquote. L' essere o non essere *comparativamente* aliquote non può risultarmi che da un *rapporto* logico assolutamente indipendente dall' arbitraria divisione da me praticata.

Per ottener dunque la bramata valutazione per mezzo della commensurazione competente , io non mi posso giovare del partito di dividere le linee in più minute parti eguali all' infinito ; avvegnachè l' uno misuratore

della prima grandezza starà sempre all'uno misuratore dell'altra, come l'un tutto sta all'altro tutto. Il mezzo meccanico dunque della divisione e suddivisione della linea, come non può alterare il rapporto logico delle proporzioni, così è del tutto *inconcludente* a stabilire la vera ragione della commensurabilità. In ogni divisione pigliando l'uno elementare del quadrato geometrico *A*, e confrontandolo coll'uno elementare del quadrato geometrico *B*, si può ripetere eternamente la stessa proposizione annunciata da principio, vale a dire che il quadrato uno elementare di *A* sta al quadrato uno elementare di *B* come il quadrato *A* sta al quadrato *B* ecc. Nella *commensurazione* pertanto il metodo suddetto è frustatorio per condurre la mente nostra ad una *valutazione omologa* ed univoca di due grandezze estese.

L'impero della *relazione logica*, la quale sta sopra ai concetti dell'esteso, e la quale altro non è che l'esercizio mentale del discernimento nostro, è tale che conviene onninamente consultare le sue leggi onde stabilire la vera *commensurabilità* dell'esteso. Consultando queste leggi noi troviamo che ogni esteso per se stesso è un *quid unum* determinato. Paragonato da noi con un altro fa

borgere l'idea relativa d'identità o di diversità di dimensione o di forma. Posta una forma identica, si possono verificare diversissimi valori delle aree: come posta una *forma diversa*, vi può essere *equivalenza* di area. L'*equivalenza* altro non è che il concetto della stessa quantità di estensione racchiusa sotto una diversa forma geometrica. Essa è in sostanza l'*eguaglianza* estesa trasformata. Due figure diverse equivalenti sono certamente fra loro commensurabili quanto all'area. Ma sono forse fra loro *sempre* commensurabili, quanto al loro contorno? Ecco ciò che niun matematico potrà affermare giammai. Come vi sono *estesi* simili ed equivalenti superficialmente, ma di lati commensurabili, così vi sono estesi dissimili equivalenti superficialmente di lati incommensurabili. Ciò è più che notorio nè abbisogna di essere comprovato.

Ma qui ancora sorge la stessa osservazione già fatta di sopra, che la *grandezza proporzionale e rispettiva* dell'esteso si desume non dalla dimensione *materiale* di una LINEA, ma dalla *ragione* delle superficie; di modo che la grandezza viene spogliata da ogni considerazione della sua *forma*, e si pone mente soltanto all'astratta quantità della superficie

e nulla più. Questo concetto è dunque tutto spirituale, tutto mentale, tutto logico. Chi amasse di simboleggiarlo, dir dovrebbe che in questa posizione la mente umana nel *valutare* le grandezze estese fa essenzialmente uso dell'idea di *unità* individua spogliata da qualunque *forma* speciale sotto la quale potrebbe esistere.

18. Procediamo oltre. Posto questo concetto, allorchè vogliamo *valutare* due *grandezze*, che cosa ne nasce dal canto della mente nostra? Il valutare importa di trovare una data quantità, la quale misuri completamente le due grandezze proposte. Fu già dimostrato a quali necessità soggiaccia la potenza nostra mentale in questa funzione. Qui volendo considerare questa funzione rispetto alla *commensurabilità* degli estesi, è necessario di distinguere l'*intento* dal *mezzo*. *Due* soli possono essere gl'intenti proposti nella commensurazione dell'esteso. Il primo riguarda la dimensione paragonata o divisa o unita dei *lati*: il secondo riguarda la dimensione paragonata divisa o unita delle *superficie*. L'estensione sola non può occasionare che queste due sole ricerche, perchè la superficie non presenta fuorchè uno spazio uniforme finito. Nel cercare la dimensione

divisa dei LATI si vuol sapere se il lato di un esteso possa essere più lungo, più corto o eguale a quello dell' altro, e di quanto ecceda o manchi dell' altro. Nella commensurazione poi unita dei lati si vuole sapere quanto l' un lato unito all' altro può offrire di lunghezza, e quindi anche quale ne sarebbe la potenza risultante. Nel cercare poi la dimensione divisa o unita delle superficie si vuol sapere quanti elementi estesi identici comprenda una data area rispetto all' altra, o rispetto ad un tutto di cui quella data area forma parte integrante. Così, per esempio, avendo su di una diagonale di un quadrato descritti due quadrati, l' uno dei quali è doppio dell' altro, volete sapere quanta sia l' *estensione* o il valor superficiale dei *complementi*, ossia dei quadrilunghi chiusi dai lati dei due quadrati? In questo caso la ricerca è tutta *superficiale* ma limitata alla data figura.

A soddisfare a questa ricerca può giovare certamente il sapere la dimensione *comparativa dei lati*. Ma l' ottenere questa dimensione è forse sempre *possibile*? Ogni matematico di buona fede mi risponderà sicuramente essere ciò *impossibile* tutte le volte che le due grandezze geometriche non stiano fra loro nei rapporti identici ai quadrati aritmetici. Fuori

di questo caso i lati saranno discretivamente incommensurabili, e però non potranno venir disegnati che col nome della *potenza* a cui appartengono. Vani dunque risulterebbero tutti gli sforzi per assoggettare questi lati ad una dimensione discreta e veramente aritmetica. Frustraneo dunque riuscirebbe ogni tentativo di giungere per questo mezzo alla bramata valutazione. E qui cade la risposta sul secondo membro della proposta ispezione. Questo appunto riguarda il mezzo della valutazione. Qui si possono istituire due ricerche; la prima si è di qual *natura* sia il mezzo che ricerchiamo. La seconda quale esser possa la *maniera* di adoperarlo.

Quanto al primo punto, osservo che noi versiamo ora nel paese della matematica *pura*, nel quale valutar dobbiamo l'estensione pensata. Ciò posto, altro stromento non abbiamo fuorchè l'esteso per misurar l'esteso. La natura dunque del mezzo è *identica* a quella dell'oggetto da valutarsi. Quanto alla *maniera* poi, noi in generale altro dir non possiamo che questa dev'essere *analogà* alla natura delle idee e alle leggi fondamentali della nostra intelligenza. Certamente, a simiglianza dell'esteso materiale, noi ricorriamo naturalmente alla *misurazione* lineare, ma dessa

deve forse essere sempre la stessa? Più ancora. Conosciam noi bene tutte le funzioni mentali, le quali all'insaputa nostra intervengono? Finalmente abbiamo noi forse scoperto il gioco segreto primo ed ultimo dei concetti geometrici ed aritmetici, i quali talvolta si avvicinano per *imprestare* e per togliere un elemento costante e decisivo della valutazione?

I rapporti logici della grandezza estesa continua non possono essere sempre identici, specialmente nei concetti pari e dispari. Nel pari havvi un intermedio di eguaglianza, il quale non si verifica nel dispari. Più ancora, nei concetti sinottici e periodici della enumerazione, applicati all'esteso, se s'incontra una costante legge, esistono però rapporti speciali ad ogni grandezza periodica. La sfera della potenza dell'unità *continua* è limitata quanto è limitata la nostra mente, e non può essere simboleggiata che a seconda delle affezioni interiori della nostra mente. Ciò posto, ne viene che un unico e material modo di misurazione non potrà mai soddisfare a tutti i bisogni della valutazione. Converrebbe che l'unità continua crescesse a modo di cerchi concentrici, la distanza e gli intervalli dei quali fossero eguali al *diametro* del primo circolo figurato come uno elementare.

Con una, due o tre linee eguali, ovvero colla divisione identicamente lineare di un contorno, voi in primo luogo non potete indicare che una radice aritmetica superficiale. Se questa linea è retta, voi indicate perfetti quadrati singolari e nulla più. Ma l'uno quadrato elementare ha un determinato rapporto rispetto al tutto. Esso poi *in se stesso* è sempre una grandezza suscettibile o d'essere accoppiata ad altra in via di *aggregazione sgranata*, o di essere ampliata *in via continua*. Ma quando dividete il lato di un tutto in tante parti eguali, voi create effettivamente un numero che vi dà l'idea della radice. Vi dà poi l'idea del quadrato se figurate tutta la figura generata da questa unica radice *simile* all'elemento unitario assunto.

Da ciò ne segue che colla divisione di una sola linea fatta con un'altra linea, voi supponete, o siete forzato a supporre un tutto perfettamente *simile* al vostro uno perfettamente quadrato; e però se fingete che il vostro uno lineare stia tante volte e non più nella data linea, voi dividete un tutto in tante parti quadrate aggregate, ognuna delle quali vi rappresenta un'unità elementare. Ma qui è evidente che l'*eguaglianza* predominante ed unicamente predominante non dà

luogo fuorchè ad un rapporto *identico ripetuto*, e nulla più. La vostra *radice* altro non è veramente nè può essere fuorchè una serie di sgranati quadrati elementari identici; ed il vostro complesso altro non è che una *determinata pluralità* di questi quadrati elementari. Questa pluralità poi la figurate limitata da ogni parte da un identico contorno egualmente lungo di quello della serie o della lista cui chiamate col nome di radice.

La commisurazione dunque *finita* e perfetta *univoca* lineare degli estesi *rettilinei* in ultima analisi risolvesi nel ragguaglio d'una grandezza univoca, l'elemento radicale della quale non può essere che *identico* coll'elemento uni-radiale d'un'altra grandezza. Dico uni-radiale, per indicare che questo elemento vien preso soltanto sopra di un *solo lato* dell' esteso, e fa parte *aliquota* di questo lato. Ecco il concetto nascosto nella commisurazione finita di due sole linee.

Havvi certamente un'altra *commisurazione* *finita* e fatta con *radici sgranate* di altri estesi *rettilinei*; ma questa non è *unitaria* perchè vien fatta con più radici sgranate. Tutti i parallelogrammi non equilateri fatti colla moltiplicazione di due frazioni lineari identiche, cioè o con tutta o con parte della base sul-

l' altezza cadono sotto di questa proposizione.

Qui però è da osservarsi che la *commisurazione*, sia singolare, sia plurale, fatta a *radici sgranate*, in sostanza non racchiude che una *ragione sola* di *eguaglianza* perfetta *elementare*, in forza della quale un solo e medesimo elemento misuratore forma il *verbo* comune del calcolo, e suppone sempre una perfetta *coincidenza* di limiti dell' unità elementare assunta. Nè vale il dire, per esempio, che il 25 sia maggiore del 16, perocchè il 25 non è che una *pluralità* o *ripetizione* maggiore dello *stesso* elemento del 16.

Fin qui non maneggiamo che la polvere o l' arena delle matematiche. Le grandezze che diconsi *discrete*, si possono considerare a guisa appunto di aggregati composti, o che si possono risolvere in elementi sgranati che stanno insieme per via di cumulazione. Esse sono le *omomerie* del mondo matematico, nelle quali la quantità crescente va in fine a risolversi. Ma la considerazione isolata o cumulativa di queste omomerie non vi palesa ancor l' arcano ultimo della valutazione, perchè dalla considerazione della pura *identità* non può nascere quello della *diversità*. L' eguaglianza predominante in tutto il corpo delle grandezze *razionali* isolate.

(come sono i singoli quadrati geometrici ed aritmetici) non vi può nè potrà mai somministrare l'idea positiva dell'uno sostanziale della *rispettiva differenza* continua, come le tenebre non vi danno lume, nè il silenzio vi dà il suono. Il *più continuo* posto fra un primo uno esteso ed il suo duplo o triplo CONTINUO come non è partorito dall'idea di eguaglianza, così pure non è un elemento *sgranato* attaccato per apposizione. Accoppiando due radici eguali, la grandezza unitaria quadrata non si duplica, ma si quadruplica.

Figuratevi pure distintamente queste grandezze, e dividetele pure l'una e l'altra in tante parti rispettivamente aliquote. Sarà sempre vero che ogni parte aliquota dell'uno starà ad ogni parte aliquota dell'altro come l'un tutto sta all'altro tutto. Qui dunque l'*identica divisione* è inconcludente per la valutazione sia lineare, sia superficiale di queste grandezze. Allorchè poi vi piacesse di unirle per formare una figura sola, e costruire un sol tutto, voi sareste privo di qualunque lume. Rimarrebbe dunque sempre la necessità di ritrovare la parola ossia il *mezzo termine comune* di valutazione dell'esteso considerato ne' suoi diversi stati, e questo.

dovrebbe sorgere dai rapporti stessi dell'unità sostanziale collo stato diverso al quale passò, e non mai limitandosi ai rapporti dell'eguaglianza individuale. Assurdo è dunque l'uso di applicare a grandezze prive di radici discrete quadranti il metodo di valutazione, sol proprio agli aggregati numerici, aventi radici aritmetiche quadranti. Illusorio è dunque il finire con un' approssimazione *indefinita*. Dico indefinita, perocchè avvi una *riduzione* di residuo indicata, la quale può prestare un lume massimo alla geometria di valutazione. La quantità continua non tollera che ragguagli superficiali; e però la linea non si può assumere che come segno indivisibile di *potenza* unita, e non come radice d'una grandezza di aggregazione. A dir vero anche nella grandezza di aggregazione l'uno lineare è puro segno di *potenza*; ma allorchè si accoppia con altre unità eguali e discrete, indica una potenza divisibile in parti eguali, dove che nella potenza continua indica un rapporto solo di proporzione che non tollera una data intima divisione razionale lineare.

Consultando la natura propria della quantità estesa si trova che non si è fatto veramente nulla fino a che non si lavora che

sulla *linea* pura matematica. Convieni trovare le *liste estese* indicate dai rapporti stessi delle grandezze *estese*, e determinare il valore areale di queste liste. Per esse e per esse sole si possono indicare le leggi di incremento e di decremento della quantità *continua*, sia coll'aggiungere, sia col determinare la potenza delle diagonali che nascono naturalmente, sia finalmente col ridurre agli ultimi termini possibili gli elementi iniziativi delle diverse proporzioni. Imperfetta, grossolana e senza simbolo è quella geometria la quale pretende di esaurire sempre l'esteso e di spingere tutto all'*indivisibile* ed all'*insensibile*, quasi che i nostri raziocinj e le nostre valutazioni o versassero sul nulla, o instituir si potessero nelle tenebre. Io sfido tutti i matematici dell'universo colla posizione mera dei punti e delle linee *inestese* a mostrarmi come le grandezze aritmetiche, geometricamente simboleggiate, passino per una vera affinità logica da uno stato all'altro di grandezza *continua*. Questo passaggio, senza la considerazione ed il maneggio d'una geometria *superficiale* e di un rapporto concludente di grandezze *estese*, rimarrà sempre incognito, e quindi il calcolo sempre tenebroso. La quantità estesa,

io lo ripeto, la quantità estesa forma l'oggetto vero delle matematiche, e però i concetti *continui* formano il primo loro elemento.

19. Talvolta nella geometria di valutazione in mezzo ad estremi veramente razionali (ossia con coefficienti lineari veramente *commensurabili*) si accoppia un' *incommensurabilità parziale*. Ma questa è in sostanza puramente *relativa*, e quasi direi *precaria*, perchè applicando il principio dell' *omogeneità* e dell' *unità di denominazione* viene agevolmente superata. La comparsa di questo fenomeno non è nè *casuale* nè *arbitraria*, ma è soggetta a certe leggi determinate, e nasce naturalmente nel progresso paragonato della quantità estesa discreta. Preziosi sono questi scontri all' attento osservatore, perocchè dessi fanno l' ufficio di *intersezioni* d' una catena elettrica, nelle quali il fuoco elettrico si mostra alla scoperta e indica date qualità e date leggi proprie. Da questi scontri difatti, nati nello stesso paese del *commensurabile*, si pone costantemente in chiaro che la possibilità della valutazione così detta *razionale finita* dipende intieramente dalla *coincidenza* dei limiti dell' uuo misuratore, il quale dev' essere identico specialmente per

valutare tanto i mezzi termini di eguaglianza e di disuguaglianza, quanto il termine *concludente*, come dimostrerò a suo luogo con esempi. Allorchè poi vien tolta di mezzo questa specie d'incommensurabilità mediante l'*unità* e l'*omogeneità* della *denominazione*, siamo condotti per mano alle vedute sinottiche, le quali ci rivelano le recondite leggi e gli intimi rapporti di affinità e di continuità fra i diversi progressi della quantità.

Questa *spuria* incommensurabilità è appunto un *mezzo termine* fra il discreto e il continuo, il quale mediante un'analisi indicata ci conduce infine a ritrovare con qual legge e con quali proporzioni accresca o decresca continuamente la *potenza* rettilinea. Essa difatti procede passo passo, e segue con minimi coefficienti rettilinei tutte le graduazioni indotte dalla curva circolare nel tagliare le rette e nel far nascere certe potenze lineari, e quindi certe grandezze estese proporzionali, fra loro coesistenti coi rapporti della varietà, della continuità e dell'*unità* sia in uno stato addensato, sia in uno stato diradato. Essa incomincia da una posizione rispettiva di eguaglianza e di rispettiva unità e varietà, e aggiunge l'*uno* continuo. Così veggiamo il passaggio propor-

zionale al più continuo, e ci avveggiamo che questo passaggio corrisponde all' ultima vibrazione della grande unità implicita che presiede a tutto il sistema dell' enumerazione, ossia meglio del senso differenziale che distingue e calcola l' unità estesa. Per essa si determinano non solo i gradualî incrementi tratti dalle viscere medesime del primo uno sostanziale, ma si determinano eziandio i medj di eguaglianza superficiale segnati dal primo movimento del centro e della curva circolare che va diminuendo l' area compresa fra due curve ecc. ecc.

20. Esclusi quindi gli antilogici e tenebrosi concetti di un *transcendentalismo indeterminato* ed assoluto (nel quale le vere e reali leggi di fatto naturale della mente nostra non sono consultate), noi seguiamo le indicazioni necessarie del vero naturale algoritmo, il quale predomina e predominerà mai sempre qualunque nostra operazione di calcolo. Allora l' incommensurabilità lineare non oppone più ostacolo alla vera e competente valutazione delle grandezze continue estese; ma per lo contrario serve di ajuto, ed anzi diviene mezzo termine necessario per questa valutazione. Senza di questa incommensurabilità difatti non si potrebbero rappresentare

i *termini concludenti* ossia le grandezze continue risultanti dai coefficienti razionali ossia discreti. Qui tutto vien regolato con un metodo *unico* ma *adattato* alla natura della quantità discreta e continua. Allora la filosofia e la matematica non solo si conciliano ma si danno scambievolmente lume, aiuto, e ci prestano una potenza prima sconosciuta.

Tutte queste cose si operano mediante un magistero facile, spedito, e quasi intuitivo, il quale non eccede punto la sfera del calcolo *iniziativo*, abbenchè i casi che maneggiate e che scegliete contengano per lo meno vere equazioni di secondo grado. Questi casi coll' algebra comune (allorchè soltanto si tratta di superare l'incommensurabilità *spuria*) non vengono sciolti che per una *triviale approssimazione*, nel mentre che coll' omogeneità complessiva vengono luminosamente e di salto definiti in una maniera finita e senza residui inesauribili.

Io sembrerò forse promulgatore di sogni a tutti coloro i quali non sono iniziati nella scienza primitiva della quantità estesa. Prodigj matematici son questi, dirà taluno, affatto *incredibili*, perchè nè veduti mai da noi, nè praticabili colla forza dell' arte che

possediamo. Io perdono questa incredulità, nè esigo che venga deposta fuorchè in conseguenza di fermissime e luminosissime dimostrazioni. Tollererò quindi con pazienza la taccia di sognatore, d'illuso e d'ignorante fino a che non produca le prove di tutto ciò che asserisco. Dico *finchè* produca tali prove, perocchè io son certo che alla prima comparsa loro evanirà ogni dubbio contrario. Duolmi che l'indole di questo scritto non mi permetta di soddisfare incontanente alla giusta curiosità dei miei leggitori. Io debbo compiere prima tutta la *proposizione* del mio soggetto, essendo questo il fine primo di questi discorsi. Io debbo quindi astenermi da ogni discussione su oggetti particolari, perocchè diverrebbero digressioni enormi condannate da quella economia che presiede ad ogni libro ben ordinato.

In aspettazione però delle prove da me promesse io invito qui ogni lettore a gettar l'occhio sulla tavola posometrica annessa a questo discorso. Io lo prego a fissar l'attenzione almeno sulle due prime colonne di questa tavola. Nella prima *scendendo* dal primo grado fino al ventesimo quarto, voi vedete che essa contiene una serie naturale di radici crescenti dall'uno fino al venti-

quattro. A fronte delle ventiquattro nella seconda colonna sta la 26 che va salendo fino al 50. Qui la prima colonna presenta una serie che dall'alto al basso va *crescendo* ad ogni grado con una radice sgranata, accresciuta sempre di un' unità, e viceversa salendo dal basso all'alto la serie va *decrecendo* della stessa unità. La colonna seconda va del pari sempre crescendo d'una radice, ma ciò fa salendo dal basso in alto. Da ciò nasce che qui abbiamo due serie finite di 24 gradi, l'una *crescente* e l'altra *décrescente*, l'una parallela all'altra. In questa posizione se da ogni quadrato della seconda colonna noi deduciamo il quadrato che le sta *contro* nella prima, noi troveremo una serie di differenze crescenti dal 100 al 2500, e che ogni termine di questa serie di differenze dista dall'altro di 100 unità. In questa serie di *differenze* voi trovate cinque perfetti quadrati aritmetici.

I. 100 radice 10

II. 400 » 20

III. 900 » 30

IV. 1600 » 40

V. 2500 » 50.

Prescindiamo ora dal quinto e fermiamoci sugli altri quattro. Scegliete quello che vi

piace. Unitelo col quadrato della prima colonna che gli sta di fronte. Voi avrete due quadrati perfetti coefficienti ed un terzo complessivo. Così, per esempio, 576 (r. 24) $+ 100$ (r. 10) $= 676$ (r. 26) 441 (r. 21) $+ 400$ (r. 20) $= 841$ (r. 29.) Compia- cetevi ora di simboleggiare geometricamente qualcheduna di queste composizioni. Figurate la secondo la costruzione pitagorica dei quadrati dell'ipotenusa e dei cateti. Per agevolare poi meglio i confronti, pigliate la metà dell'ipotenusa, e fattone raggio, descrivete un circolo. Nelle ipotenuse divise in numeri *dispari* voi sarete costretto a divider l'uno esteso, e quindi si duplicherà l'espressione della radice, e si quadruplicherà il valore delle aree. Ciò, per fare un semplice esperimento, non importa. Il fenomeno risulta sempre lo stesso, sia che dividiate, sia che conserviate intero l'uno primo componente le radici suddette.

Fatta questa costruzione, esaminate le parti della vostra figura. Voi troverete che ad onta dei cateti e dell'ipotenusa, tutti razionali, sorgerà a primo tratto *l'incommensurabilità spuria* fra i segmenti dell'ipotenusa e la mezza proporzionale che viene costituita, calando una perpendicolare dal vertice del triangolo

rettangolo sulla sottoposta ipotenusa. Domandate a voi stesso il valore sia lineare, sia superficiale tanto di questi segmenti dell'ipotenusa, quanto della mezza proporzionale. Che ne avverrà? Se voi impiegate di salto l'algebra comune, non otterrete che una triviale indefinita approssimazione. Ma se applicherete il metodo della omogeneità ed unità di denominazione, la pretesa incommensurabilità sparirà, e voi otterrete i valori finiti d'ogni segmento e di ogni differenza.

21. Fu detto di sopra che vi possono essere due specie d'incommensurabilità: la prima di *contorno*: la seconda di *superficie*. Quella di contorno si può verificare tanto fra il curvilineo ed il rettilineo, quanto fra i rettilinei medesimi. Fra i rettilinei però, come fu detto, l'incommensurabilità dei lati non fa ostacolo alla competente valutazione delle superficie. Non è così fra il curvilineo ed il rettilineo. Fra la curva e la retta è così impossibile la coincidenza lineare, come è impossibile che un filo metallico fissato nelle sue estremità, e teso come una corda sonora, venendo tagliato, possano le sue parti toccarsi fuorchè in linea retta. Alzando od abbassando queste parti di un sol punto

per toccare la curva di cui formano la corda , amandue non si potranno *mai* vicendevolmente toccare. La curva quindi non può essere rappresentata mai con due soli punti , ma per lo meno con tre. Il minimo dunque della curva inchiude tre relazioni , nel mentre che la retta ne inchiude essenzialmente una sola.

L' uno *esteso* e *finito* esige per lo meno tre limiti rettilinei , ossia per chiudere qualunque spazio si esigono per lo meno tre linee rette. L' uno esteso adunque finito , ridotto a' suoi minimi termini possibili di contorno , sarà necessariamente un esteso o triangolare o circolare. Seguendo le analogie e rammentando ciò che abbiamo detto nel paragrafo antecedente rapporto all' espressione estesa delle linee rette , potremmo conchiudere che al perfetto quadrato rettilineo corrisponde il circolo , ed al quadrilungo corrisponde l' elisse.

L' area circolare adunque si può figurare come *unità* curvilinea continua ed univoca ; l' area ellittica per lo contrario si può figurare come *pluralità* estesa curvilinea. Così simbolicamente la linea retta unica non può essere che *segno* associato di unità , o quadrata , o circolare , assumendo questa linea o come lato del primo o come diametro del secondo.

Ciò premesso , domando se l' incommensu-

rabilità curvilinea e primariamente la circolare possa formare *ostacolo* alla geometria di valutazione? Io prego ad esaminare bene i termini della quistione. Altro è dire che fra la curva e la retta sia impossibile ogni *coincidenza metrico-lineare*, ed altro è il dire se questa impossibilità di coincidenza possa servire di ostacolo alle valutazioni superficiali. Parimenti altro è domandare se si possa stabilire il *valor superficiale* dell'area del circolo, ed altro è il dire se quest'area o il giro della periferia possa servire di ostacolo alle valutazioni superficiali *rettilinee* determinate dal giro o dal taglio della curva circolare. Sarà sempre vero che il concetto della curva circolare non è identico a quello della linea retta e viceversa. Sarà pur vero essere impossibile una coincidenza metrica fra queste due specie di linee. Io dunque non sarò così pazzo da voler misurar le parti dell'una colle parti dell'altra, e pretendere di trovarne il ragguaglio. Ciò involge un assurdo, perchè si suppone una possibilità di coincidenza, e quindi un'identità fondamentale che non esiste. Ma malgrado questa diversità essenziale nella forma dei contorni, niuno vede l'impossibilità di determinare le superficie dei veri o spurj quadrati fabbricati sulle *rette*

determinate dal giro della curva circolare, senza per altro esaurire mai la diversità fra questa curva e la retta. Così, per esempio, alzando dal diametro diviso in tante parti alcune perpendicolari alla periferia, io posso ottenere rapporti certi fra le diverse grandezze dei quadrati fabbricati su queste rette. Si dirà perciò che io possa ritrovare la quadratura del circolo? Ciò sarebbe ridicolo ed assurdo. Ma dall'altra parte poi non si potrà negare che io possa ritrovare la superficie dei veri quadrati geometrici e aritmetici che si possono fabbricare sulle diverse rette variamente limitate dal giro di questa curva, in conseguenza della divisione da me fatta del diametro sottoposto? Ognuno vede difatti che qui la curva non segna che due estremità della linea retta, la quale non cangia per la diversità dell'istromento che taglia o limita, ma viene variamente limitata per la distanza solamente fra i due punti che formano l'estremità della linea medesima. La curva circolare per tanto nella geometria di valutazione si deve considerare come uno *stromento* variamente limitante la lunghezza delle linee rette; ma con tal legge però, che le diverse dimensioni da lei indotte stiano fra di loro con determinati rapporti sol propri

di una grande *unità*, la quale viene rappresentata appunto dal raggio del circolo stesso che percorre gradatamente i punti diversi che formano l'estremità delle ordinate e delle ascisse. Ora considerata la cosa sotto di questo punto di vista, e meditando tutti i fenomeni che nascono dalle rispettive costruzioni, lungi che nell'andamento circolare e nella rispettiva incommensurabilità curvilinea si possa trovare un ostacolo alla geometria di valutazione ed alla teoria del calcolo unificativo, vi si trova all'opposto tutta la *virtù logica* necessaria alla valutazione ed alla unificazione. Tutto considerato, noi siamo condotti alla conclusione che nell'*incommensurabile* sta racchiusa la vera *unità metrica rispettiva*, non posta dall'arbitrio dell'uomo, ma determinata dalla natura stessa del soggetto analizzato. Talvolta questa unità metrica della natura coincide con quella che fu posta da noi, e ciò accade appunto scorrendo gli intervalli fra le radici quadranti. Ma il passaggio e l'unione logica dei coefficienti a formare una sola grandezza appartiene così all'*unità non materiale*, ma all'*intellettuale*, che sembra potersi sol rappresentare dal simbolo della curva circolare e non da quello della linea retta. L'*associazione logica dell'identità* e della

diversità, la quale costituisce l'essenza di ogni mezzo termine, si effettua appunto associando l'azione della curva circolare coll'azione della linea retta. Questo è così vero, che se per un'ipotesi impossibile si potesse ritrovare la così detta quadratura del circolo, la figura rettilinea che ne sorgerebbe, non potrebbe giammai prestare gli ufficj logici che la curva circolare presta e prestar può alla geometria di valutazione. Questa non segue la materiale dimensione della superficie racchiusa in un dato spazio, ma bensì la *ragione intellettuale e logica* delle diverse grandezze accoppiate insieme ed associate ad una mentale unità sistematica, nella quale lo spirito umano adempie la legge fondamentale di ogni raziocinio. Infinitamente dunque più estesi ed importanti sono i servigi di questa geometria di valutazione (la quale sa giovare dell'incommensurabilità medesima), che i vantaggi o i servigi che ritrar si potrebbero dalla impraticabile quadratura del circolo. Io prego a por mente a questa osservazione, la quale versa propriamente su l'ultimo fondo delle leggi del nostro spirito nel paragonare, giudicare e comporre le diverse grandezze estese.

Per virtù di questo simbolo noi possiamo

difatti cogliere i tratti caratteristici del principio dell' omogeneità applicato con un' identica denominazione , tradotta e trasformata dappoi in conseguenza dei rapporti necessari che ne emergono. Guardiamoci dal confondere l' unità del principio colla *uniformità delle maniere*. L' uniformità di maniera non può convenire che a grandezze identiche logicamente. L' unità del principio per lo contrario deriva dall' unità e dall' identità della mente che istituisce il calcolo , e che nel far ciò è necessitata a sentire i rapporti *concorrenti* ed i *concludenti* dei proprj concetti. L' applicazione del principio deve variare a seconda dell' oggetto. Così lo sguardo corporale varia di movimento o di mezzi , secondo l' aspetto degli oggetti ch' egli ama di esaminare , ma la legge ottica è una.

Se difatti trattar dovete le famiglie delle grandezze continue e delle discrete, delle linearmente commensurabili e delle incommensurabili, la vostra ragione vi annunzia *ipso facto*, che deve occorrere qualche *diversità* nel metodo della valutazione, per ciò stesso che gli oggetti presentano qualità tanto contrarie. L' *assoluta* o perfetta *identità di maniere* pertanto non solamente riescirebbe sospetta, ma costituirebbe almeno una for-

tissima presunzione di falsità e d' incompetenza. L' esperienza verrebbe indi in soccorso di questa presunzione, e vi accerterebbe che non vi siete ingannato.

Ora tornando al proposito dei veri e plenarij mezzi termini di valutazione si può stabilire la massima, che se il principio dell' *omogeneità* e dell' *unità essenziale* dei metodi di valutazione deve predominare nel calcolo; debbesi nell' atto stesso soggiungere che quest' *omogeneità variar* deve secondo la reale *natura* degli enti valutati, e però che l' *omogeneità* importa bensì *unità* ma non *uniformità* perfetta, la quale anzi violerebbe il principio stesso dell' *omogeneità*. L' *omogeneità* è appunto tale, perchè *segue* la natura delle cose. L' *unità* poi *essenziale* e non *modale* verificar si deve, atteso appunto l' *identità* e la *diversità* che si accoppiano nella quantità estesa.

22. Tutte queste osservazioni riguardano il *merito intrinseco* del calcolo, la potenza del quale appunto risulta dall' *attitudine* sua a somministrarci le valutazioni che bramiamo. Io son ben lontano dal pretendere di aver dimostrato in che consista e da che derivi la plenaria possanza del calcolo iniziativo che ci occupa. Converrebbe stendere un lungo

trattato per rendere palesi gli elementi di questa possanza, e corredarlo con esempi. Si ritenga dunque ciò che ne ho detto come una mera *proposta* e come un primo presentimento per indicare in generale qual idea formar ci dobbiamo e dove dobbiamo volgere le nostre disquisizioni per fondare la possanza di questo calcolo. Passo ora ad una fondamentale ispezione riguardante la *maniera* di procedere nello stabilire le prime teorie della valutazione.

A questa maniera si riferiscono le tre condizioni seguenti. Per esse la teoria della valutazione deve essere 1.^o *prefinita* nella sua *tendenza*; 2.^o *obbligata* nel suo *maneggio*; 3.^o *omogenea* nelle sue conclusioni. Quando dico che deve essere *prefinita* nelle sue tendenze io intendo che si debbano escludere tutti i tentativi *arbitrarij* e *casuali*, e però che ogni passo debba essere INDICATO dalle nozioni ritratte dallo studio precedente già compiuto nella parte ostensiva della scienza (1). In esso appunto ci vengono rivelate tanto le affezioni e le leggi della quantità estesa, quanto le esigenze della nostra mente nel

(1) Discorso II. N.º 18.

meditare questa quantità. Colla cautela di stabilire la teoria della valutazione in *vista* d'indicazioni *preparate e preconosciute*, si dà finalmente nesso, vita e possanza alla intiera logica della quantità estesa. Per questo mezzo si empie quella fatale lacuna, la quale io oggi è frapposta fra la geometria e l'aritmetica. Per questo mezzo si connette strettamente l'una coll'altra per farle servire amendue allo studio della natura ed al perfezionamento delle arti. Così l'algebra, figlia della geometria, rammentando dopo molto viaggio e dopo molte gesta impotenti di avere una madre, volge indietro lo sguardo e i passi suoi, e va a porgere la mano a colei che da tanto tempo fu abbandonata sulla strada, e da essa implora lume ed ajuto per poter camminare senza traviamenti e con buon successo nel paese specialmente degli incommensurabili, e indi servire ai bisogni dell'umanità. La geometria, io lo ripeto, la geometria deve *fondare* la vera e piena teoria della valutazione, e farlo deve in una maniera certa, facile, breve, ed a mano a mano preindicata dai simboli stessi della quantità. Convien dunque compire lo studio della *geometria* per compire la teoria fondamentale delle *valutazioni* dell'esteso. Questo

complemento importa di fare uno studio speciale d' un ramo che io appellerei GEOMETRIA DI VALUTAZIONE, del quale la teoria delle proporzioni ci offre già molte preparazioni importantissime.

Quando io scorro i libri di geometri abilissimi; quando ad un' aurea facilità e limpida chiarezza veggo accoppiata una buona scelta (locchè specialmente ammiro negli scrittori francesi) io esclamo: Che peccato che così belli ingegni siensi contentati di darci soltanto una vecchia materia, o non l'abbiano aumentata che di qualche particella! Ad essi era nota pur troppo l'insufficienza e la difficoltà degli algoritmi usati. E perchè mai non si sono occupati a indagarne la cagione ed a suggerirne il rimedio? E perchè mai non si sono presa la briga d'interrogare la natura e di ascoltarne i primi suggerimenti? Essi avrebbero scoperto con quanta munificenza questa buona madre soglia premiare i figli che la consultano con raccoglimento e ne seguono fedelmente le indicazioni. Lume, facilità, certezza, possanza razionale, e indi fisica e morale, sono i benefizj che la natura largamente comparte a' suoi ingenui cultori. Tenebre, difficoltà, incertezza, impotenza, sono i mali che afflis-

sero, affliggono e affliggeranno sempre tutti coloro che o per ignoranza o per orgoglio si scostarono; si scostano e si scosteranno dalle tracce segnate dalla natura. Così anche nel mondo intellettuale regna un ordine eterno munito d'irrefragabile sanzione. Così coll'irrogare le pene suddette la natura retrospinge i traviati entro l'orbita del grand'ordine col quale regge l'umanità. Così col castigo stesso ci fa sentire la sua provvidenza e ci conduce e sospinge a quella perfezione a cui essa ci destinò.

Ho detto che la geometria di valutazione ha una intima connessione con quella delle proporzioni. Ora soggiungo che la geometria di valutazione non è nè può essere altro che LA TEORIA STESSA GRADUALE DELLE PROPORZIONI, RACCOLTA DA TUTTI I RAPPORTI DELL'UNITÀ COMPLESSIVA, ESTESA E MANECCHIATA COL PRINCIPIO DELL'OMOGENEITÀ. In questa teoria io distinguo due grandi parti. La prima contiene le condizioni *assolute*, la seconda le condizioni *relative*. Ciò che io dico del tutto, verificar si deve in ogni parte, e però anche nella soluzione di qualunque particolare problema. Se la cosa non fosse così, non sarebbe più vero che la data legge generale presegga ai procedimenti del calcolo; pe-

rocchè dessa intanto è generale, in quanto regge e predomina in tutti i casi particolari. Io offrirò a suo luogo un esempio d'una soluzione fatta con questo procedimento *preindicato*, al lume del quale si potranno istituire esperienze di questa geometria di valutazione. Ora mi conviene far avvertire ad una *particolarità* di questa geometria, alla quale non so se i moderni abbiano posta bastante attenzione; e questa è la *suddivisione indicata* delle prime radici naturali dei quadrati posti in serie continua (1). Lo scomparto di questa serie fu fatto (in conseguenza d'una naturale indicazione) in tante colonne, ognuna delle quali contiene ventiquattro termini, facendo in modo che il ventesimo quinto serva di anello, di connessione per unire una colonna coll'altra. Queste colonne, considerate come una via percorsa, presentano l'idea di altrettanti *stadij* della unità elementare; perocchè si può figurare che l'uno primo metrico progredisca successivamente per una data strada retta, e a mano a mano

(1) Veggasi la tavola I.^a In questa tavola viene esposta soltanto l'*espressione numerica* tanto liquore quanto superficiale.

si vada con identiche ripetizioni discreti ampliando ad ogni passo con certe leggi tanto assolute quanto relative. Una palla che rotola giù per un erto pendio coperto di neve, come farebbe una ruota sempre girante sopra uno stesso asse, e che a mano a mano avvolga una striscia di neve della larghezza eguale al proprio diametro; una grossa ma assai flessibil tela, o carta, o pasta d'una data grossezza, la quale si figuri incominciare ad avvolgersi con un nocciolo di diametro eguale alla sua grossezza, fa sorgere in fine un rotolo, la di cui base vi presenta un rotondo fatto a lumaca, o sia diviso in una spirale, cui potete, quando vi piace, chiudere in un sol circolo. La grossezza della pagina ravvolta, considerata nella sola sua superficie, vi presenta una lista minima superficiale, la larghezza quadrata della quale (o sia il quadrato della cui testa) si può assumere come unità prima superficiale. Estraeate quest' uno metrico quadrato, e servitevene come di elemento fondamentale primo. Noi vedremo con quali rapporti naturalmente indicati si faccia la *suddivisione* ricercata di questo elemento, a quali usi poi serva questa suddivisione nella soluzione dei problemi competenti. Io mi riservo di presentare le osservazioni conve-

nienti sulla costruzione e sui rapporti sì di fatto che di ragione di questa tavola, tanto per la dimensione lineare quanto per le valutazioni superficiali, e di porre in evidenza lo scambio antilogico che viene praticato dai più dei calcolatori, specialmente della linea colla lista; e di far avvertire ai risultati tenebrosi e mortali che indi nè derivano.

Proseguiamo. Esaminando, per esempio, la prima colonna o stadio di questa serie ad oggetto di ottenere una *suddivisione indicata delle radici*, o sia meglio dell' *uno elementare esteso* (che dapprima si presenta compatto nella sua forma e ne' suoi passi), io non trovo che il solo termine decimo, il quale mi offra una naturale e non artificiale indicazione di questa suddivisione. Potrei certamente nel decimoterzo e nel diciassettesimo conseguire suddivisioni indicate; e ciò col duplicare la radice sia colla divisione, sia coll' addizione; ma questo tentativo sarebbe *arbitrario e prematuro*, nè mi presenterebbe gli altri rapporti naturali di *valutazione* che concorrono nel quadrato decimale. Unico per tanto in questo primo stadio riesce questo quadrato atto a soddisfare alle *condizioni* imposte al mio procedimento. Dopo di lui viene il ventesimo. Convien dunque arrestarsi al sim-

bolo di questo termine, ed in ogni sua parte esaminarlo. Qui non conviene perder nulla, perchè ogni indicazione contiene rapporti importantissimi per tutte le valutazioni consecutive. Qui sta propriamente la luce *prima* del calcolo iniziativo specialmente combinato, perchè qui prima di tutto si palesa lo stato degli estremi massimi vitali entro l'unità, come fu sopra spiegato. Qui sorgono i primi rapporti palesi della *composizione continua* di due ragioni l'una doppia dell'altra, e della coincidenza in una stessa persona.

Qui si palesa e da qui si deduce il MEDIO limite fra i limiti di *unificazione* (diversi da quelli di semplice esclusione) *riguardanti* la ragione fondamentale del *simplo* e *duplo*, raccolti nel concetto unificato del *triplo*, e riportati alla legge e sottoposti all'impero primo ed ultimo dell'IMPLICITO, del quale abbiamo di sopra ragionato in questo discorso n.º 3. Da ciò ne sorge una nuova specie di *calcolo trilogico*, l'unico proprio dell'unità estesa, e concorde alle leggi fondamentali e perpetue dell'umana intelligenza. Qui si nasconde eziandio un MEDIATORE MASSIMO RAZIONALE per comporre ed unire grandezze di natura diversa complessa, come si vedrà a suo luogo. Il calcolo del quale parlo, per essere indicato

deve soddisfare alle condizioni *assolute* e *relative*. Si deve incominciare dall' esame delle *assolute* per fondare i dati della competente valutazione, e passare indi alla costruzione di MOVIMENTO per dedurne indi le *suddivisioni* dell' uno metrico prima assunto. Con ciò sempre proceder dovrà l' insegnamento primitivo delle matematiche. A chi ama il ben tenebroso ed il ben difficile sembreranno queste cure vere fanciullaggini; ma il fatto sta che questi signori coi loro $x + y + z$ si trovavano talvolta ben imbarazzati, ed anzi del tutto incapaci a sciogliere questioni che vengono agevolissimamente sciolte con queste fanciullaggini. Sprezzato quindi, come fa il giudizioso viandante, il garrir di queste cicale, o a dir meglio di questi automi calcolatori; io proseguirò fermo nella mia carriera.

23. Nel mio secondo discorso ho fatto sentire che la *legge* (la quale nel calcolo sublime assoggetta gli incommensurabili ad un dato algoritmo) si deve far certamente sentire fino dai *primordj* delle valutazioni dell' esteso. Il calcolo sublime, riguardato nel suo complesso, deve essere eziandio calcolo di *unificazione*, senza di che egli mancherebbe della sua parte migliore, ed anzi essenziale. In questo calcolo la possanza dell' *implicito*

si fa sentire gagliardamente sia per differenziare, sia per palesare le leggi di una serie, sia per segnare certi periodi. L'implicito quindi è decisivo, sia come mezzo di *valutazione*, sia come mezzo di *limitazione*, sia come mezzo di *conclusione* ecc. Egli, non ravvisato nella sua lucida origine, viene sfigurato sotto l'assurda *denominazione* ora d'infinitamente piccolo, ora di zero relativo, ora di quantità *sprezzabile* e da *eliminarsi* ecc. ecc. Nell'algebra stessa quest'implicito dà causa alle radici *immaginarie*, e confonde sotto una stessa legge *artificiale* le valutazioni del commensurabile e dell'incommensurabile, o sia del discreto enumerato e del continuo. In tutti questi concepimenti havvi certamente un fondo nascosto pieno di verità. Lo sconcio pertanto risulta dalla cattiva *maniera di esprimersi*; e questa cattiva maniera di dire nasce dalla *confusa maniera di concepire*. La confusa maniera poi di concepire deriva dal non salire alla cognizione delle leggi primitive e fondamentali di puro fatto, che reggono imperiosamente la nostra intelligenza nelle valutazioni della quantità estesa. Questa cognizione primitiva non si può acquistare fuorchè con *ESPERIMENTI variati, reiterati e certi*, i quali facciano sortire alla nostra vista le

leggi recondite ed indeclinabili della nostra intelligenza nel concepire, paragonare e combinare le quantità estese. Quella ponderazione, quell'industria, quella pertinacia, quella sagacità che viene impiegata intorno l'elettricità, il magnetismo, la chimica, per far parlare, dirò così, la recondita natura fisica, si deve pure impiegare per far parlare il recondito uomo interiore. Ora esercitata a dovere l'arte di osservare cogli sperimenti convenienti, e rilevate le particolarità tutte, emerge appunto anche una quantità *implicita mentale*, la quale non appartiene propriamente agli estesi rettilinei impostati, ma che interviene sempre nei concetti dei così detti incommensurabili per compiere la vera e logica unificazione. Questa scoperta è un *fatto primitivo semplice*, e dirò quasi intuitivo, col quale si rettificano tutte le cattive maniere di dire, adottate dai matematici, e nell'atto stesso si dà ragione dell'esattezza dei loro calcoli e del fondo di verità ravvolto sotto le cattive loro locuzioni.

L'implicito si ravvisa propriamente da' suoi EFFETTI a guisa delle forze esistenti in natura, e non già per la sua forma, come ho già avvertito di sopra (N.º 3). Volendo nell'unificazione *magistrale* impiegarlo a dovere, con-

viene necessariamente conoscere le *leggi naturali*, non altrimenti che per dar corso ad un' acqua o per dirigere una corrente elettrica, è necessario di *conoscere* e di *rispettare* le leggi naturali di questi fluidi. Ora si domanda per quale maniera si possano *manifestare* a noi le leggi naturali di questo implicito? Ogni matematico filosofo mi risponderà che tali leggi ci verranno rese manifeste mediante le *funzioni naturali* della quantità estesa, come le leggi della natura vivente vengono rese manifeste dai fenomeni che accadono o che emergono da sagaci esperimenti. Determinato questo *mezzo*, che cosa dunque ci resta a fare per iscoprire almeno le prime leggi naturali che bramiamo? Ognuno mi risponderà che converrà incominciare da uno sviluppo in *serie*, proseguire indi coll' analisi sì assoluta che comparativa indicata dai termini di questa serie, e ciò sì per le grandezze discrete che per le continue, e finir indi coll' indicazione dei risultati che ne emergeranno.

Qui io non posso presentare questo lavoro. Ciò non ostante in via di primo presentimento io invito il lettore a gettar nuovamente l'occhio sulla tavola posometrica qui annessa. Dopo un breve esame limitato sol-

tanto ai fenomeni presentati dalle due prime colonne, si avvedrà che allorquando noi vogliamo contemplare le cose *sinotticamente*, ci si presenta una segreta funzione precisamente inversa di quella che esplicitamente abbiamo eseguita. Noi infatti incominciando dall'uno avevamo per una positiva *apposizione* fatte crescere radici e fabbricati quadrati. Ma considerando bene le cose, noi ci avvegiamo di avere invece praticata una *DIVISIONE* d'una grande unità nascosta, e ciò tanto per tutto il corpo dell'unità, quanto per i gradi di distanza fra l'uno e l'altro termine. Più ancora troviamo che ciò che ci fa specchio nell'ultima evoluzione, nella quale si effettua l'*eguaglianza* e si finisce assolutamente il primo periodo, ciò, dico, che ci fa specchio, non è il zero segnato di fronte al termine di 50, ma bensì una quantità *nascosta*; la quale ci dà per differenza lo stesso quadrato di 50.

Nè qui dir si potrebbe che la costruzione di questa tavola sia *arbitraria*; ma all'opposto confessar si deve essere ella *indicata*. Mirate prima di tutto le ventiquattro disegni scritte dei quadrati perfetti. Esse si variano solo fino al grado di 24, e appunto si ripetono identicamente all'infinito,

talchè leggendo voi materialmente qualunque numero espresso con tre cifre o più, e non incontrando qualcheduna delle dette 24 desinenze, siete certo ch'egli non è un quadrato aritmetico. Paragonate in secondo luogo ogni quadrato di ciascuna colonna col quadrato di quella che gli sta contro a sinistra. Voi vedrete che fra la prima e la seconda la differenza ad ogni grado cresce costantemente di 100: fra la seconda e la terza cresce di 200: fra la terza e la quarta cresce di 300 ecc. ecc. Tutto ciò si fa con tal legge, che giunti al fine di ogni colonna vi avvedete che il periodo è così compiuto, che non potete far valere l'analogia e proseguire in via di differenza a far nascere il quadrato che naturalmente vien dopo, nè meno duplicando o rispettivamente triplicando i termini indicati. Il primo periodo è il più picco: ed in questo non si possono eccedere che i primi cinque quadrati naturali.

Qui taluno mi potrebbe ricordare che noi abbiamo cinque dita in una sola mano; che siamo dotati di cinque sensi distinti; che noi colla mente o coll'occhio possiamo ad un sol tratto al più cogliere un complesso di cinque idee; come avvertì anche Carlo Bonnet; e che oltre a questo segub, siamo

costretti a contare. Queste indicazioni però non presentano che una congettura di *analogia* per ispiegare la legge indicata dalla tavola. Ci basti il fatto per farci avvertire che havvi nello sviluppo dei concetti nostri posometrici una legge *segreta* la quale si manifesta nello *sviluppo* *paragonato* della quantità.

Ma vestendo i concetti aritmetici con forme *estese*, e congegnandoli in modo che la ragione nostra abbia sotto la mano i termini assoluti e i termini relativi convenienti per eseguir l'unificazione giusta le condizioni pienamente *logiche* già accennate, che cosa ne dovrà seguire? Egli ne seguirà che la mente umana dovrà conciliare le ragioni proporzionali intellettuali colle spoglie, colle forme e colle condizioni irrefragabili dell'esteso. Volendo quindi trattare *congiuntamente* due, o più proporzioni con una forma di *eguaglianza incompatibile* all'indole logica di esse, dovrà nascere nei prodotti un più ed un meno rispettivo, il quale, lungi di riprovare l'esattezza del calcolo, anzi lo giustificherà e ci potrà servir di passaggio e di mezzo termine a comunicare la forma logica complessiva alle assunte grandezze. Allora ci verrà fatto palese l'*elemento rispettivo* di

continuità. Allora vedremo come coll' identità si concilii la varietà, come la disuguaglianza vitale si congiunga colla eguaglianza elementare. Allora vedremo come le parti stiano insieme e tutte concorrano a stabilire un tutto unico, individuo, pieno di concordia, di forza e di bellezza ecc. ecc.

Nulla è qui l'industria, come è nullo l'umano arbitrio. Tutto è indicato espressamente e determinato imperiosamente dall'andamento stesso della natura, la quale corona l'opera di colui che seppe interrogarla, e volle docilmente seguirne i dettami. Io sarò come Dio, dice in suo cuore il trascendentalista; ma egli non s'avvede che invece di occupare il trono della luce e della possanza, si assiede su quello delle tenebre e dell'impotenza. Egli non si avvede che legge di oscurantismo è quella che egli detta seguendo l'orgogliosa pretesa di possedere un assoluto negato ad ogni mortale. Egli non travede il pericolo che il genio delle tenebre, al quale egli serve, possa essere debellato dalla luce possente e dalla spada acuta della sentita e parlata ragione.

Bastino questi cenni per segnare almeno in via di prima proposta le tracce generali dell'unificazione *magistrale* domandata. Qui

non si trattava che del semplice *magistero* del calcolo sinottico atteggiato in conseguenza delle leggi necessarie della unificazione sostanziale. L' esecuzione positiva di questo *magistero* darà, a suo tempo, lume, e presterà la prova e la sanzione a questa proposta.

24. Quando il calcolo di unificazione venga fondato, dimostrato, e fino dai primordj della disciplina esercitato, che cosa avvenir deve nelle matematiche? Ognuno lo prevede agevolmente dopo le cose accennate nel numero 13 di questo discorso. Lume, posanza, unità, semplicità, facilità in tutta la scienza, saranno le conseguenze di questo genere di calcolo. Allora si andranno a fondere in uno stesso complesso tutte le scoperte fatte fin qui. Allora tutte le opinioni vere si daranno mano, e le erronee stesse si spoglieranno di quella larva o di quei difetti che le viziavano. Quel di vero che contenevano, apparirà sotto il genuino suo aspetto, e contribuirà ad accrescere il tesoro delle utili verità.

Di questo tesoro han diritto gli apprendenti di approfittarsi, ed è dovere dei precettori di comunicarlo, per quanto si può, genuino, splendido, completo. Ciò fare non si può con una esposizione la quale manchi di

unità; e quest' unità mancherà sempre fino a tanto che le nostre ricerche saranno, dirò così, diramate, come veggiamo nelle opere dei matematici. Convien dunque almeno riunirle ed unificarle, riducendo le cognizioni alle cose fondamentali e di una vera e solida utilità.

Ma per eseguire come conviene questa intrapresa, convien possedere l'*anatomia* e la *fisiologia*, dirò così, matematica, la quale a' nostri giorni pare negletta o non forma almeno che l'occupazione segreta di qualche dilettante. Allora si potrà dire che la scienza esiste *colle sue intiere radici*. Allora si potrà comunicare ad altri con queste *intiere radici*. Quando queste radici non sono intiere ma troncate o imperfette, la scienza non può mai produrre il frutto del quale sarebbe capace.

L'istruzione elementare che vien data dopo che la scienza è cresciuta, non è legittima se non soddisfa a due ufficj ad un sol tratto. Il primo è quello di seguire i passi naturali dell'invenzione; ed il secondo di dirigere questi passi nel modo più facile, più breve e più proficuo allo scopo proposto. Ma ciò non è fattibile se non si possiede la scienza con tutte le sue radici intiere, e se non si

padroneggiano le relazioni che le parti singole hanno col tutto. Ora che cosa richiedesi per questo? Si ricerca l'*unificazione sistematica e particolareggiata* del corpo intiero della scienza che voi comunicate spicciolatamente.

E qui si apre l'adito di parlare d'un'altra specie di *unificazione*, la quale propriamente appartiene a tutto il corpo dell'istruzione primitiva. Qualunque istruzione deve avere una certa unità logica e morale più o meno ampia: ma la matematica deve averla in grado particolare e superiore alle altre tutte. Ora esaminando i nostri metodi, pare che siasi studiato di privarvela, malgrado l'istanza contraria della natura.

Questo modo di procedere porta la conseguenza, che la matematica, la quale dovrebbe formare il modello dell'arte di pensare e di esporre, non ne offre che squarci imperfetti. Suodare gli organi intellettuali, come la ginnastica suol fare delle membra esterne; comunicare alla mente vigore, agilità, disinvolture; avvezzare lo spirito a quell'esame finito, a quella deduzione filata, a quelle spinte estese, a quei concetti lucidi, a quelle recapitolazioni congegnate dalle quali risulta un tutto sistematico, e procurare così allo spirito umano quel vigore e quell'agi-

lità pei quali possa regnare ed esser utile nell'orbe scientifico; ecco in che consistere dovrebbe lo *scopo morale* dello studio delle matematiche. Rimarrà certamente agli apprendenti ancora a far molto; imperocchè colla matematica non s'impara nè meno a conoscere la figura d'una foglia di un albero, ed essa non forma che un bastone per camminare; ma ciò che rimane riuscirà meno penoso, perchè l'esame sarà quasi di puro fatto. Ma quest'esame non potrà riuscir bene che coll'arte di osservare e di dedurre, già prima appresa ed esercitata nelle matematiche. Che cosa accade invece coi metodi attuali? Con essi si avvezza lo spirito a pigliare le idee, dirò così, *ex abrupto*, a connetterle tali e quali si presentano, ed a proceder oltre ad occhi chiusi; talchè se questa maniera diviene abituale, si trova in fine di aver avvezzato lo spirito a creare, senza accorgersi, anche dei mostri scientifici. Io potrei recare qui molti esempi tratti dalle opere di celebri matematici allorchè si applicarono a trattare soggetti estranei alla loro professione principale.

Così le matematiche, invece di tendere allo scopo morale al quale dovrebbero essere dirette, vanno contro del medesimo. Così

invece di giovare agli studj ulteriori, o nuocono o non fanno nulla. E perchè ciò? Per mancanza di quel vero e *compiuto* metodo del quale io parlo. Mi si dirà che le matematiche, atteso la natura delle idee di cui fanno uso, non importano nè ricerche precedenti di fatto, nè analisi rispettive della natura degli oggetti da esaminarsi. Ed io rispondo che se il bisogno di verificar fatti e di analizzare preventivamente le parti degli oggetti non si verifica nelle matematiche come nelle altre scienze, ciò non ostante questo esame è necessario sotto un altro aspetto.

Col porre le idee sole acquistate dal senso comune, e col connetterle, si può forse formare un matematico? Le proprietà e le affezioni delle diverse figure geometriche, le cognazioni e le filiazioni degli enti matematici, le rispettive trasformazioni e il tuono, dirò così, che imprimono, sono forse cose suggerite dal senso comune? Ora se da una parte queste sono qualità *di fatto* degli enti matematici, e se dall' altra non sono suggerite dal senso comune, esse debbono essere scoperte, riferite e comprovate prima di esercitare il calcolo. Col nudo senso del più, del meno o dell' eguale non si determina nulla in particolare. Le teorie più su-

blimi non sono, o almeno non debbono essere fuorchè l'espressione *comune* di questi particolari. Ora questi particolari hanno o no un' indole recondita che determina le leggi del calcolo? Dunque è necessario di *esplorare* quest' indole prima di dar mano al calcolo.

Non sono questi arcani, ma cose note a tutti coloro che si esercitarono con accorgimento negli studj matematici. Anzi oso dire che, tutto esaminato, si trova che i diversi oggetti matematici formano, dirò così, una sola grande famiglia così congiunta, dipendente e collegata, che non si possono ben determinare le qualità di fatto degli individui diversi, se non si sale ad un tronco comune e non si abbraccia la sfera della grande unità che tutte le collega. Per questo motivo pertanto lo studio preventivo di *puro fatto* degli enti matematici diviene vasto, importante, decisivo al pari di quello dei fatti naturali.

Nè la cosa può essere diversamente; imperocchè in sostanza la parte di fatto matematica non è che un ramo della psicologia o ideologia, o sia meglio della cognizione delle *leggi di fatto* dello spirito umano riguardanti i concetti della quantità. Posto ciò, ne viene che se queste leggi di fatto non

sono *notorie*, esse abbisogneranno di essere scoperte e comprovate prima di far uso delle medesime. Calcolare è la *conseguenza* di questa scoperta. È dunque un errore il dire che la *posizione* degli enti matematici non esiga alcun esame precedente. Certamente per chi vuole esercitare una pura curiosità o procedere a caso, non v'è bisogno di questo previo esame. Ma per chi vuole conoscere ed agire con cognizione di causa ed operare con effetto pieno e durevole, questo esame è indispensabile. Esso anzi forma la *prima parte* della grande unificazione sistematica delle diverse parti di questa scienza. Il far bene questo esame costituisce l'*arte d'osservare* gli oggetti matematici; arte la quale ha i suoi artifizj al pari dell'arte di osservare le cose naturali.

Fine del Discorso terzo.



PROSPETTO

DEGLI ARGOMENTI DEL DISCORSO TERZO.

1. In quanti sensi si possa prendere la parola di unificazione. Presa come operazione di calcolo, che cosa significhi.

2. Se si possa proseguire ad unificare, come si prosegue ad enumerare.

3. L'unificazione appartiene al senso integrale. Da ciò nasce l'implicito.

4. Scambio irragionevole dell' implicito sia colla quantità impostata, sia col nulla assoluto.

5. Predominio naturale del senso naturale implicito nella unificazione.

6. Ragione intellettuale che caratterizza l'unificazione.

7. Del mezzo logico dell'unificazione.

8. Della continuità, e quindi della maturità. Degli estremi e dei medj.

9. Unità, varietà e continuità delle cose naturali. Insufficienza relativa del calcolo usitato in oggi.

10. Spirito filosofico del calcolo di unificazione.

11. Conseguenze pel metodo dell'insegnamento primitivo.

12. Obbiezione contro la possibilità del calcolo di unificazione.

13. A quali condizioni soddisfar debba la soluzione dell' obbiezione proposta.

14. Della metafisica del calcolo iniziativo. Prime

osservazioni per trovare i mezzi termini sostanziali di questo calcolo.

15. Dell' uno misuratore , e delle quantità indicate e sussidiarie considerate in se stesse.

16. Dell' elemento sostanziale della continuità.

17. Delle diverse specie di commensurabilità e d' incommensurabilità.

18. Del mezzo di valutazione considerato in se stesso.

19. Della incommensurabilità spuria. Suo uso nelle matematiche.

20. Conseguenze per fondare la possanza del calcolo iniziativo sinottico. Sperimento proposto. Tavola posometrica.

21. Concorso del curvilineo e del rettilineo per valutare le grandezze estese , e quindi fondare il calcolo sinottico.

22. Dell' unificazione magistrale. In che possa e debba consistere.

23. Come riguardare ed usare si debba dell' implicito.

24. Dell' unificazione morale delle matematiche.

DISCORSO QUARTO.

*Considerazioni generali sul metodo
dell' insegnamento.*

1. Facile, sensibile e manifesto deve essere il primo insegnamento delle metematiche, nè esigere altra preparazione che quella di saper sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere. Ma quali ne debbono essere gli oggetti? d'onde dobbiamo incominciare? come dobbiamo procedere? Ecco le quistioni prime che si presentano. Gli oggetti sui quali io credo che esercitar si debba l'attenzione degli apprendenti, parmi che esser debbano quelli che sono più finitimi collo stato dell'apprendente, e racchiudono la radice di tutta la dottrina. Le immagini delle superficie tratte dai solidi in diverse guise limitate, contornate, divise o unite, formano l'oggetto materiale di questa prima dottrina. L'oggetto poi scientifico consiste nella cognizione delle qualità e degli effetti per noi interessanti che queste superficie possono offrire.

La distinzione dell'oggetto materiale dall'oggetto scientifico è forse più necessaria alla matematica che a qualunque altro ramo dello scibile. Negli altri rami gli oggetti materiali

presentano certi caratteri apparenti , distintivi e limitanti , per i quali un osservatore si trova costretto a concretare le sue ricerche entro una data sfera. Nelle matematiche per lo contrario tutto a prima giunta comparisce così *uniforme* e così identico , che pare che l'osservatore o non possa aver tracce per camminare diritto ad una data meta , o che sia a lui libero di dirigere a beneplacito i passi suoi. L'aspetto primo delle matematiche si può rassomigliare o ad un vasto deserto o ad un oceano sterminato nel quale un viaggiatore senza bussola o erra smarrito o può camminare da qualunque parte a lui piaccia. Ma se è vero che la matematica , al pari di qualunque scienza , ha e deve avere per ultimo scopo l'interessante , sarà pur vero che anch' essa abbisognerà d'una traccia precedente e di sussidj concomitanti per agire con profitto , malgrado l'apparente uniformità del suo soggetto. Ora il primo mezzo consiste appunto nel distinguere l'*oggetto materiale* dall'*oggetto logico* della scienza.

L'*oggetto materiale* consiste in una data idea *tal quale ci viene presentata dalla natura*. L'*oggetto logico* poi consiste nella data qualità , relazione , stato o effetto che noi bramiamo di conoscere. Lo scopo di fatti della

scienza consiste nel conoscere con verità , come quello dell' arte consiste nell' operare con un effetto inteso. Ciò posto , ne viene che l' oggetto , dirò così , *materiale* della scienza non si può confondere coll' *oggetto logico* voluto da lei. Nello stesso oggetto materiale esistono e possono esistere centinaia di *oggetti logici* , ed esistervi in uno stato particolare unito e continuo. Nell' oggetto logico per lo contrario non entrano che quelle idee sia assolute , sia relative , le quali si riferiscono alla *fatta ricerca*. In breve l' oggetto materiale è tanto distinto dall' oggetto logico , quanto le cose sono distinte dal *verbo interiore* che sta in noi.

Ho detto che lo stesso *oggetto materiale* può presentare più *oggetti logici* , o sia somministrare molteplici *oggetti di ricerca*. Ciò è di una notorietà che non ammette discussione. Così una montagna può formare oggetto di geologia , di ottica , di mineralogia , d' idrostatica , di botanica ec. Ciò che dicesi d' una montagna , si verifica più o meno in qualunque cosa materiale che ci cade sott'occhio. Noi noi stessi al nostro cospetto formiamo il soggetto di molte e molte scienze diverse ; e però racchiudiamo molti e molti *oggetti logici* nello stesso punto.

Io presento un libro a Pietro , ed egli mi domanda di *quale materia* tratti. Lo presento a Paolo , e mi domanda quale ne sia l'*argomento*. Lo presento a Giovanni , e mi domanda quale ne sia il *soggetto*. Tutti e tre pare che mi abbiano domandato la stessa cosa ; ma il primo ha usato il nome di *materia* ; il secondo quello di *argomento* ; il terzo quello di *soggetto*. Più ampia pare l'interrogazione di Pietro , perchè la stessa materia può offrire argomenti diversi di discorso. Ogni ramo particolare di una scienza versa su di una data *materia comune* ; ma ogni ramo della medesima può esser preso come tema o argomento di un discorso. Parimenti ogni oggetto particolare può formare argomento di un discorso particolare. Dunque sulla stessa materia si possono formare argomenti diversi , o sia proporre temi diversi e tessere tante trattazioni distinte. Dunque la somma degli oggetti logici di una data scienza , o sia degli argomenti di ricerca o di discorso , forma propriamente quella che dicesi *materia* di una scienza. Ma questo concetto annesso al nome di materia di un discorso nostro è diverso dall' *oggetto* propriamente materiale. Quella è propriamente la ricerca o il tema proposto : questo consiste nella idea tal quale

ci vien presentata dalla natura. Esso forma, dirò così, il *fatto*: la materia per lo contrario forma l'*oggetto* di ricerca su di questo fatto.

Gli oggetti delle nostre scienze debbono essere *interessanti*. Dunque non tutti gli oggetti logici che possono offrire un dato oggetto materiale debbono essere ammessi a far parte dello *scibile interessante*; ma debbono essere prescelti sol quelli che servono a procacciare un bene o ad allontanare un *male*. Dunque gli altri oggetti discernibili e che si possono abbracciare in un dato corpo di nozioni, non possono entrare nel vero corpo della scienza interessante. Dunque se essi possono pascolare la curiosità di un ozioso, non debbono far perdere un tempo prezioso all'istruzione.

Prima che l'arte sia illuminata, l'uomo erra senza guida, e però si occupa, anche non volendo, di questi oggetti secondarj di curiosità; ma dopo che è giunto a ritrovare il cammino più breve, egli deve riguardarli come oggetti di lusso, e non di accessorio soccorso.

2. Tutto questo appartiene alla *scelta*. Passiamo all'*ampiezza* ed ai limiti della scienza.

Ciò che sfugge al nostro discernimento e

ciò che eccede la nostra comprensione è sottratto al nostro dominio intellettuale. Ma le cose esistenti in uno stato particolare, unito e continuo, racchiudono anche molte cose indiscernibili ed eccedenti la nostra comprensione. Dunque *tutte* le particolarità degli oggetti materiali delle scienze non possono diventare oggetti logici delle medesime. Dunque al di là di certi *limiti* rimarrà sempre un margine indefinito, il quale, se può provocare la nostra curiosità, respingerà sempre ogni nostro tentativo. Insormontabili sono dunque le barriere dello scibile; e quindi vani riescono gli sforzi nostri per sorpassarle. Dunque quando incominciano le vere tenebre dell' indiscernibile, l'istruzione deve arrestarsi, e non vendere come dogmi i sospetti e le congetture sul paese coperto di caligine. So che all'orgoglio o alla curiosità umana duole questa moderazione; ma so del pari che nell'economia della natura e della vita essa giova oltremodo.

3. Ogni scienza consiste veramente nella *specie* e nel *complesso* degli oggetti *logici* che concorrono a soddisfare alla nostra ricerca. Dunque la *specie*, la *dimensione*, la *collocazione* ec. nel mappamondo dello scibile di ogni scienza saranno necessariamente costi-

tuite, prodotte e dipendenti dalla specie e dalla *PROCEDENZA LOGICA* di questi oggetti, e non dalla qualità, sia delle nostre *facoltà*, sia degli *oggetti* materiali. Strana dunque e incompetente fu la divisione delle scienze e delle arti proposta da Bacone e seguita dagli Enciclopedisti francesi. Quanto alle scienze, essi le riferirono alla memoria, all'immaginazione e alla ragione; e quanto alle arti, alla qualità della materia lavorata. Ma con questa divisione non si serve nè alla verità nè alla utilità. Non alla verità, perchè, invece di esprimere i caratteri dai quali la scienza viene *costituita*, e per i quali essa si *distingue* da ogni altra; invece di presentare quella tessitura per la quale si vegga procedere da un' antecedente, e connettersi con una susseguente, e con altre collaterali, si fa comparire la pretesa *potenza* alla quale piacque di riferirla. E qui si offende ancora la verità per un altro lato; imperocchè in tutte le scienze concorrono indivisibilmente la memoria, l'immaginazione e la ragione, talchè il prodotto appartiene bensì *solidalmente* a tutto l'animo umano; ma non si può esclusivamente attribuire ad alcuna delle tre ricordate facoltà.

Non si serve poi all'*utilità*; imperocchè se

l' utilità d' una divisione scientifica risulta dal poter conoscere come una parte stia con un' altra , e quindi come tutte formino un sol complesso per poterle esaminare con frutto ; egli è manifesto che colla divisione di Bacone e degli Enciclopedisti quest' utile è intieramente *perduto*. Voi commettete ad un anatomico di presepitarvi il disegno delle parti interne di un corpo animale. Che fa egli ? Le cose che si veggono ad occhio *nudo* le pone in massa da una parte , ed in alto dipinge un occhio nudo che riceve i raggi di tutte. Dall' altro canto pone le parti le quali non si possono vedere che col microscopio , e in alto dipinge un altro occhio dietro un cannocchiale , e che riceve i raggi di tutte. Che direste voi di questa maniera ? E questa è la massima fondamentale della divisione scientifica di Bacone e degli Enciclopedisti francesi.

Un albero enciclopedico deve rassomigliare ad una carta geografica , nella quale si veggano gli *aspetti* naturali dei paesi e la rispettiva loro *ubicazione*. E però , a parlar propriamente , quest' albero non può essere contenuto in un sol prospetto. L' albero *generale* , a guisa di mappamondo , non dovrebbe presentare che le grandi membrature ,

dirò così, dello scibile. A questo succeder dovrebbero poi altrettante carte particolari quanti sono i grandi rami segnati nel *map-pamondo*. In queste carte particolari si dovrebbero vedere tratteggiate le grandi divisioni proprie della data scienza con i confini delle scienze colle quali essa ha un' immediata relazione. E quando la scienza fosse assai estesa, si dovrebbero aggiungere altre carte particolari.

In tal guisa avremmo un *atlante enciclopedico* infinitamente utile e per i precettori e per gli studiosi. Ma colla norma di Bacone e degli Enciclopedisti francesi questo lavoro è impossibile. Se nella esecuzione è piaciuto loro di distinguere qualche ramo, ciò è avvenuto perchè la divisione fondamentale sta nel loro albero come un' insegna di osteria. Del rimanente, seguendo l' indole delle tre facoltà dell' animo nostro, tutto dovrebbe stare in un fascio.

4. In atto pratico tutto procede in un senso così concreto, unito e continuo, che la distinzione stessa della *scienza* dall' *arte* diviene, per dir così, più intellettuale che reale. Quando si tratta di *conoscere* qualche cosa con *verità*, ha luogo la *scienza*. Quando si tratta di *produrre* qualche *effetto prima*

inteso, ha luogo l'*arte*. Ma per conoscere con verità bisogna *far* qualche cosa che produca la cognizione del vero ed allontani quella del falso. Ecco l'*arte*; e quest'*arte* è la *logica* sia naturale, sia artificiale. Parimenti quando si tratta di produrre un effetto *inteso* convien conoscere i mezzi opportuni, e distinguerli dagli inopportuni. Ed ecco la scienza che serve all'*arte*. Dunque nella sfera del dominio umano, nel quale si vuole ottenere un qualche scopo, l'*arte* e la scienza costituiscono in realtà una sola potenza, nè si distinguono che dall'*effetto* che esse producono e si propongono. Si propose egli l'uomo di conoscere con verità? Ecco la scienza. Si propose egli di produrre effettivamente qualche altra cosa? Ecco l'*arte*. La scienza dunque diviene per questo modo figlia dell'*arte*, nell'atto stesso che l'*arte* è figlia della scienza.

In che dunque si risolve la cosa? Che la scienza *primitiva* è *senz'arte*. Essa è opera della natura e non dell'umana industria. Essa è atteggiata, divisa, sospinta dalla natura e non dai decreti particolari dell'uomo. La scienza dunque primitiva è figlia dell'*arte*, dirò così, della natura; come l'*arte* dell'uomo è figlia della scienza derivata dalla natura. L'*arte* umana col ritornar sulla na-

tura, la fa servire agli intenti suoi; vale a dire l'uomo col conoscere tanto la potenza propria quanto le *forze* da lui *disponibili* della natura, e che possono da lui esser mosse secondo la sfera della sua potenza, fa servire queste forze alle sue intenzioni e a' suoi bisogni, e nell'atto stesso egli si sottrae fino ad un certo punto dall'impero, dirò così, d'una cieca fortuna. Allora si separa l'impero della fortuna da quello dell'arte. Allora l'impero dell'arte gradualmente si allarga alla massima sua ampiezza, e quello della fortuna si restringe, quanto a noi, entro i suoi minimi limiti. Questo non è opera nè di un solo uomo nè di un solo secolo, ma delle società intiere e di più generazioni, collocate in circostanze più o meno felici. Così l'uomo diventa rispetto alla natura tanto più *libero* quanto più diventa *potente*. Egli poi diventa tanto più potente, quanto più conosce la *relazione* delle sue forze con quelle della natura, e il *modo* di farle servire a se stesso.

Dopo queste conquiste però, le quali a noi sembrano magnifiche, e dopo lo stabilimento dell'impero umano, quello della natura e della fortuna (per buona nostra sorte) rimane ancora immenso e prepotente; nell'atto

che quello dell' uomo rimane più o meno circoscritto e sempre pedisequo.

La massima *latitudine* dunque del dominio umano rispetto alla natura risulterà sempre dalla *massima somma* dei casi ne' quali alla umana potenza sarà fattibile di far servire le forze della natura a grado dell' uomo. Ma questo servizio non potrà mai riuscire o proficuo o durevole se si pretende di *contrariare* il corso supremo di lei. Dunque l' uomo non potrà veramente far servire la natura a se stesso che secondandola. Durevole quindi e feconda non riuscirà l' opera dell' uomo se non quando verrà raccomandato, dirò così, alla catena del fato che lega e trae ogni cosa. Ciò che accade nel mondo fisico, accade pure nel morale e nel politico; e perciò si suol dire che uno stato violento non può essere durevole e perpetuo.

Ciò che dicesi del violento dir pur si deve dello *slegato*, del *debole*, del *saluario*, dell' *inopportuno*, appunto perchè la legge della conservazione, della riproduzione e della vita universale esige le condizioni dell' *unità*, della *continuità* e della *connessione* non solamente colla forza centrale della natura, ma coll' *andamento* vario e progressivo di lei. Per la qual cosa l' opera dell' uomo, per essere

veramente utile, deve rassomigliare a quella della natura. E se pel corso dei secoli e per una potenza accresciuta egli può camminare per vie più brevi, egli ciò non ostante non può dispensarsi dall'imitare sempre il modello della natura. Anzi a proporzione che egli cresce in lumi ed in potenza, si trova più in grado di conoscere la corrente, dirò così, del fato, ed evitare quegli scogli dei quali una cieca fortuna o non lo rende accorto o non gli dà il mezzo di evitare lo scontro.

Ecco la legge suprema alla quale sono sottoposte tutte le opere sì dell'ingegno che della mano dell'uomo particolare e delle società. Tutto serve a questa legge, talchè non v'è distinzione fra le opere fisiche e le morali, fra le interiori e le esteriori, fra quelle della mente e quelle della mano, fra quelle dell'uomo singolare e quelle delle intiere popolazioni. Le scienze sono manifatture mentali, le quali vanno soggette alla stessa legge. La morale e la politica sono da un lato una specie di meccanica, e dall'altro lato una specie di coltura.

5. Restringendoci quindi alle operazioni *scientifiche*, ne viene, che in qualunque ramo delle medesime si dovrà ubbidire alla legge

sopra espressa , sotto pena almeno di veder *frustrata* l'opera nostra. Per la qual cosa anche nello studio e nell' insegnamento delle matematiche siamo costretti a servire alla detta legge. I buoni metodi pertanto altro in sostanza non saranno che l'espressione e l'applicazione particolare ed *intiera* di questa legge. Dico anche *intiera* ; perocchè *tutto* l'uomo interviene in ogni sua opera, e v'interviene in un *certo tempo* , in un *certo luogo* e con *date circostanze*. Niente esiste in un senso generale , isolato o interrotto , ma tutto esiste in un senso particolare , connesso e continuo. Per la qual cosa quei metodi i quali non si conformeranno a *tutto il complesso* di questo *stato reale*, riesciranno sempre o imperfetti o frustranci. Dunque ogni metodo dovrà essere *opportuno* , oltre di essere *dimostrativo* della data scienza od arte. .

So essere impossibile di dare regole perfette per tutte le circostanze concrete ; ma so del pari che la natura umana ha le sue leggi *consuete* sulle quali si può statuire , lasciando al discernimento di chi deve applicare le regole il supplire onde ottenere la loro proficua ed opportuna esecuzione. So dunque fra le leggi e le regole e la loro esecuzione passa sempre una *certa distanza* ,

questa *distanza* non riguarda la *bontà* e l'*opportunità* generica delle medesime, ma quel solo tratto e quella sola differenza che passa fra lo stato *comune* e consueto, e lo stato singolare e circostanziato.

Opportuno, io dissi, deve essere ogni metodo oltre di essere *dimostrativo* della data dottrina. Quest'opportunità deve essere ad un tempo stesso *logica, morale e fisica*. L'*opportunità logica* esige che le nozioni non siano premature e saltuarie, ma siano l'una dopo l'altra comunicate giusta quella *filiazione* e quel progresso col quale stanno nell'albero genealogico dello scibile. L'*opportunità morale* esige che esse siano date in modo da piantarsi e rimaner nella mente degli apprendenti in una maniera *chiara, durevole e confacente* alla loro destinazione. L'*opportunità finalmente fisica* consiste nell'essere *proporzionata* al grado d'intelligenza portato dallo stato necessario dell'*età* e dello *svilupamento* delle umane facoltà. Senza il concorso simultaneo di queste tre opportunità, ogni metodo è frustraneo, violento, e talvolta anche nocivo.

Per mala nostra sorte l'opportunità è appunto ciò che manca quasi da per tutto ai nostri metodi attuali; talchè io non so se

fosse meglio commettere l'istruzione al caso, che all'opera di precettori destinati. Ciò che è di fatto, si è che gli uomini distinti si sono forinati da se stessi, e le poche guide delle scuole non servirono loro che di occasione per conoscere i titoli delle scienze e le opere degli scrittori.

Tutte le annoverate condizioni sono indispensabili a qualunque ramo d'istruzione; e però necessarie anche agli studi matematici. La sola giunta dunque risulterà dai caratteri speciali e distinti di questa scienza. Ma questa giunta ad altro non deve servire che ad *effettuare* queste condizioni; ed appunto per rendere pratica e concreta l'effezione di queste condizioni. Questa giunta deve essere tratta dall'*indole* propria delle cognizioni matematiche, riportata alla natura ed alle circostanze degli apprendenti. Ciò posto, avendo sott'occhio il *primo stadio* di quest'istruzione, dobbiamo necessariamente considerare il *punto* da cui partiamo, la *meta* alla quale vogliamo giungere, e la *capacità* ed i *bisogni* della mente dello studioso. 1.° Il punto da cui partiamo; perchè non v'ha niente di peggio che la istruzione *saltuaria* e non raccomandata ad un *addentellato* precedente. 2.° La *meta* alla quale vogliamo

giungere , perchè senza di ciò la nostra fatica sarebbe gettata. 3.^o Finalmente la capacità e i bisogni della mente dello studioso , perchè senza di ciò si seminerebbe in un terreno non preparato.

6. Per soddisfare ad un sol tratto a tutte queste condizioni parmi che l'unico partito sia di amministrare questa primitiva istruzione , seguendo le mosse degli *antichissimi* coltivatori di lei. Quando io propongo di imitare gli *antichissimi* coltivatori delle scienze matematiche , non intendo di frapporne quei ritardi e que' travimenti che sono inseparabili da tutte le prime scoperte umane , ma che debbasi ricalcare la strada da loro tenuta colla carta , dirò così , alla mano , e con passi successivi nella direzione più retta e più compendiosa. Il punto dunque della partenza e dell'arrivo debbono essere i medesimi. Identici debbono essere i punti di passaggio. Identico finalmente il frutto immediato che se ne ritrae , benchè di maggior valore.

Tutta la difficoltà dunque si riduce a sapere quale sia lo *spirito* di questo metodo antichissimo ; perocchè si tratta d'imitare questo solo *spirito* coi *sussidj* che abbiamo , e con precedente *cognizione di causa*. Questo

spirito non è difficile a scoprirsi perocchè si tratta appunto dei primi passi.

A questa mia proposta qualunno obietterà che io voglio ridurre il mondo matematico alla prima infanzia, e quindi alla primitiva cecità. Ma quest' obbiezione è senza fondamento. Pretendo io forse di togliere le cognizioni che abbiamo, o non piuttosto di aumentarle? pretendo io forse di abolire i metodi ulteriori sublimi, o non piuttosto di prepararvi meglio gli apprendenti? Ciò posto, io vi domando, l' uomo d' oggidì è forse di una pasta diversa dall' uomo antico? le leggi naturali ed insormontabili dello spirito di lui sono forse cangiate? nasce egli colla scienza infusa o non piuttosto ignorante come l' antico? dall' altra parte poi non è egli vero che i lumi utili che successivamente furono prodotti, nacquero per una necessaria e natural *filiazione* e non dall' arbitrio umano? Ma se questa filiazione è cosa della *natura*, non tanto per la sua essenza quanto per la sua origine; dunque nell' istruzion primitiva matematica converrà seguire questa filiazione sotto pena di cadere o nel violento o nello slegato, nel saltuario, nell' inopportuno, e quindi nell' imperfetto, nello sterile e nell' impotente.

Le scienze matematiche costituiscono una parte dello scibile umano. Esse dunque vanno necessariamente soggette alle *leggi comuni* a tutto lo scibile, e vengono colpite con una uguale sanzione. L' *io* che studia le matematiche è quello stesso *io* che studia la fisica, la morale, la politica ec. Come la varietà degli oggetti esterni non fa cangiar l'occhio dell'osservatore e le leggi dell'ottica, così l'indole delle matematiche non può far cangiare le leggi della *ragion generale*. Per la qual cosa, ciò che è comune a tutto lo scibile, appropriar si deve necessariamente anche alle matematiche, colla riserva di soggiunger poi le altre particolarità speciali o richieste dall' indole della scienza.

Queste condizioni comuni sono proprie di tutti i tempi e di tutti i luoghi, e per conseguenza non possono essere o violate od ommesse a nostro arbitrio. Per la qual cosa se un tal metodo fu giusto e proficuo per gli antichi, deve pur esserlo anche per noi. Nelle cose di *ragione* intellettuale non occorrono le vicende delle altre parti del mondo delle nazioni.

L'unico vantaggio che abbiamo sopra i nostri antenati si è quello di poter dare in pochi mesi od anni ciò che ha costato molti

secoli di ricerche mille volte inutili e poche volte utili. Così colui che trovasi in un porto di mare, al quale approdano navi da tutte le parti del mondo, sceglie senza pena ed in brevissimo tempo le produzioni dei diversi paesi, per trasportar le quali furono corsi molti pericoli, impiegato molto tempo, fatte molte spese, smarrito talvolta il cammino, subito molte fatiche ec. ec. Ma questo vantaggio che abbiamo, non è nel particolare ignorante, ma *fuori* di lui. Egli è un deposito affidato in seno alla società, erede delle generazioni passate. Quindi per farne partecipi i successori in modo da ricavarne frutto ed aumentare l'eredità dei loro maggiori, si ricercano appunto i buoni metodi. Ma questi metodi in sostanza riduconsi ad un *solo*; poichè d'una sola maniera siamo fatti noi, e lo spirito nostro è soggetto a date leggi naturali e non a date altre.

Per la qual cosa l'aver ereditato un ricco patrimonio non ci dispensa dal sapere come vada amministrato ed aumentato. L'economia quindi dell'insegnamento deve essere tanto più perfetta, quanto più le ricchezze nostre sono accresciute. Ma la perfezione di questa economia non si otterrà mai se non a proporzione che imiteremo con piena cognizione

ed accorgimento il primo periodo della invenzione. Fu detto che gli estremi si toccano senza confondersi. Ecco ciò che osservare dobbiamo nelle opere nostre. I primi passi furono fatti alla cieca, ma furono giusti. Ripetiamoli con piena cognizione e facciamo che siano gradualmente ed opportuni, e saranno più rapidi e più utili.

Con questo consiglio io non intendo che svolgere dobbiamo le pagine della storia positiva delle matematiche, e trarne indi modelli d'imitazione. Io proporrei una sciocchezza ed una sciocchezza d'impossibile esecuzione. Le origini matematiche si perdono nella caligine d'un' indefinita antichità, della quale non abbiamo monumenti. Dall'altra parte si tratta di valerci dei prodotti dell'invenzione per trapiantare le cognizioni acquistate nei tardi posterì che vengono al mondo. Quando propongo d'imitare gli antichissimi coltivatori io intendo di impiegare una frase la quale esprima lo *spirito filosofico* e non la forma positiva del metodo da me creduto necessario.

7. Tutto l'affare dunque si riduce ad eseguire le *condizioni* indispensabili prescritteci dalla natura ad apprendere con *verità* e con *profitto*. Fin qui io ho accennate le condi-

zioni eminenti di questo metodo. Ho distinto lo scopo *logico* dallo scopo *morale*, e la parte *dimostrativa* dalla parte *interessante*. Ora mi conviene dire in particolare qualche cosa della parte *dimostrativa* della *istruzione* *matematica*, perchè dèssa è quella che somministra l'*oggetto proprio* che si pretende di conseguire. Le altre condizioni non riguardano che la *maniera* migliore di trasmetterlo e di assicurarlo.

La parte *dimostrativa*, della quale intendo di parlare, non riguarda la *forma* minuta ed esteriore colla quale si scioglie un problema o si dimostra un teorema, ma bensì il *complesso* delle funzioni logiche colle quali si acquista la scienza. *Tutto il processo logico* per tanto forma per ora l'argomento del mio discorso. Questo processo *intiero* si è quello che io comprendo col nome di *parte dimostrativa* dell'insegnamento. Le parti di questo processo sono le stesse in *matematica* come in qualunque altra disciplina. Io mi restringo qui alla parte *eminente*, perocchè gli artificj pratici sono una conseguenza dei dettami della medesima.

Distinguere, *connettere*, *esprimere* sono le funzioni simultanee ed inseparabili di qualunque invenzione ed istruzione possibile

umana. Esse sono indispensabili alla limitata nostra *comprensione*, perocchè ad *un sol tratto* non possiamo ben cogliere colla mente se non quanto cape una nostra mano. All' *intelligenza* suprema queste successive funzioni non sono necessarie, come necessarie non sono quelle forme simboliche che denominiamo *idee generali*, le quali realmente non sono che *monogrammi* per ajutare la limitata nostra *comprensione*.

Distinguere, connettere, esprimere nella *maniera* la più *facile*, la più *breve* e la più *proficua* all' intento che ci siam proposto, forma il *merito* dei buoni *metodi* sì d' *invenzione* che d' *istruzione*. L' effetto primo ed *intrinseco* il più segnalato di essi si è quello di *ridurre le idee ai minimi loro termini*. Con ciò intendo di dinotare quell' operazione per la quale si estraggono e si incorporano i concetti, e si rannodano a pochi centri di richiamo, per mezzo dei quali tutte le idee principali riguardanti quel tal soggetto logico vengono risvegliate ad un tratto. Da ciò nasce quello che dicesi *colpo d'occhio*, il quale forma il *merito* eminente dell' *ingegno*; e quando coglie gli estremi più lontani e gli unisce, costituisce il *genio*.

8. Il *distinguere* si può prendere in due

sensi ; il primo come puro *fatto*, ed il secondo come *operazione logica*. Il distinguere, considerato come puro fatto, altro non significa che quell'atto mentale per il quale facciamo sortire le idee differenti *componenti* i nostri concetti. Questo risalto puramente mentale deriva dall'esercizio della nostra *attentività*, ossia della attività dell'animo nostro, il quale nelle masse delle percezioni sia interne sia esterne (le quali a prima giunta si presentano confuse, uniformi, incorporate) si sforza di *discernere* sia le parti che le compongono, sia i limiti che le separano, sia le relazioni che le connettono e cose simili. Fino a che non figurate uno *scopo* a questo esercizio, egli rimane un'operazione di *puro fatto*. Ma tosto che voi volete con questo esercizio scoprire la *verità*, la operazione di distinguere esige di essere fiancheggiata da quelle funzioni, senza le quali sarebbe impossibile di conseguire la cognizione del vero. Posto questo scopo, convien avvertire che altro è il *distinguere* ed altro è il *disgiungere*. La prima operazione altro non importa che di avvicinare l'occhio o adoperar una lente per veder in una maniera distinta e propria ciò che veggiamo in confuso. Il *disgiungere* per lo contrario importa

il segregare un oggetto e costituirne una cosa avente o un'esistenza propria o un'attività isolata. In ambi i casi interviene un nostro giudizio. Nel primo si attribuisce un'essenza ed esistenza puramente logica, propria all'oggetto. Nel secondo se lo considera spogliato da ogni relazione o di causa o di effetto o di concorso; in breve se lo riguarda come *dissociato*.

È più che noto che non tutti gli oggetti logicamente *distinti* possono essere realmente *esistenti*, e che non tutti gli oggetti realmente esistenti sono effettivamente *disgiunti*. Eppure un rozzo istinto ha tratto e trae ancora alcuni pensatori a confondere questi concetti. La famosa setta dei Nominalisti, combattuta e fin condannata dalla Sorbona, mostra quanto grossa o illusa (benchè astratissima e meglio *sfumatissima*) fosse la filosofia dominante di quel secolo. Le produzioni poi moderne di alcuni cervelli lenti e grossi ci somministrano le prove attuali. Per ben distinguere e per ben disgiungere ricercansi gli occhi e le ali dell'aquila, e non gli occhi e le gambe della talpa. I cervelli grossi e lenti non potranno mai e poi mai nè ben cogliere le *differenze* nè ben abbracciare il *complesso* degli oggetti logici. Il loro

ufficio dunque nel mondo scientifico è quello di occuparsi di que' lavori che si fanno col l'arco della schiena, e non col cervello. Quando violando la loro vocazione si vogliono ingerire in ufficj superiori, e dal portar sassi e calcina vogliono passare a far da architetti, le loro produzioni sono moli informi, slogate, rovinose, oltre di essere meschine, goffe e senza splendore. Voi difatti non ravvisate che brani staccati di concetti compatti. Voi vedete che colle loro pretese astrazioni non iscompongono le idee, ma le pigliano per i capelli, e le palpano al di fuori, limitandosi quasi sempre o al davanti, o al di dietro, o al fianco, e mai abbracciando il tutto della cosa.

Da ciò deve nascere, come nasce di fatti, che niun osservatore si trova d'accordo col l'altro: e quindi, se egli ha seguaci, si formano tante scuole, le quali si combattono a vicenda, e sono tutte orbi che giuocano alle bastonate. Fino a che essi si limitano all'anfiteatro dell'idealismo puro, essi non presentano che uno spettacolo ridicolo: ma allorchè invadono le scienze e le discipline *interessanti*, il loro procedere diventa intollerabile non solamente per le mostruosità che partoriscono, ma per la beria colla

quale deprimono e rigettano le cose veramente eccellenti non configurate alla loro maniera. Al ben distinguere e al ben disgiungere ostano pure i cervelli vivaci, sottili, ma puerili, i quali pigliano i concetti a volo di uccello. La vivacità, la varietà e la disinvoltura abbagliano, ma non creano opere che reggano al crociuolo d'un pieno e solido esame. Anch' eglino hanno il loro orgoglio; ma è più sensibile e più tollerabile di quello dei primi. Se consideriamo difatti le loro produzioni, esse non hanno l'aria goffa e pesante, ovvero stentata e strana dei primi. Essi a fianco di un concetto pieno non pongono un' appiccicatura, nè dopo d'un pensiero nobile soggiungono una trivialità. Leggendo le loro opere non vi sembra di camminare su una grossa ghiaja, ma su un terreno, sebben disuguale, ciò non ostante agevole, spedito e circondato di amenità. Il loro orgoglio poi è più tollerabile, perocchè se essi non vi offrono le produzioni di un genio vasto, possente, profondo e solido, ciò non ostante hanno l'attitudine di sentirne almen di lontano il pregio e di stimarlo anco col plagio. Che se poi passiamo alla sfera dell'interessante, essi non hanno la balorda pretesa di violentar la natura e di trattarla

sul letto di Procuste, come fanno i primi, ma si piegano alle voci della medesima. E se mancano di grandi principj, almeno suppliscono colla finezza d'un senso morale che nobilita e raccomanda i loro divisamenti.

Vi sono altri cervelli i quali hanno una profondità parziale, ma mancano di quella *libera spiritualità*, la quale non solamente sa sollevarsi alle grandi vedute, colle quali ben si connette e ben si disgiunge, ma eziandio si spoglia da quelle illusioni e sgombra quei fantasmi che circondano la sfera dell'uomo interiore. Di ciò fan fede le loro produzioni nelle quali vedete profondità e disordine, indipendenza e pregiudizj, presentimenti morali e violenza, e sogliono mancare sempre di varietà, di finezza, di amenità e di armonia. Anche questi hanno il loro orgoglio, ma esso non impedisce loro di stimare e di riconoscere il buono quand'anche non sia fatto alla loro maniera, e di accoglierlo con istima.

Sonovi finalmente cervelli d'una tempra viva, ma riposata, armonica ed estesa, i quali presentano le cose con isplendore, finitezza, armonia e connessione quale si ricerca per la scienza completa. Tale era per esempio quello dei Greci.

9. Ho detto che per ben distinguere sono necessarie alcune funzioni *sussidiarie*. La prima di queste funzioni consiste nella PROPOSTA della *materia* o dell' *oggetto* della data scienza o disciplina.

Se senza presentare un oggetto al vostro sguardo voi non lo potete esaminare, egli sarà egualmente vero che se nol presentate *tutto* non lo potrete *esaminare* per intiero. Ma non esaminandolo *per intiero*, l'idea ultima particolareggiata che ne risulterà, non costituirà giammai l'*intiero concetto distinto* della cosa. Ora mancando una parte di ciò che cercavate, voi siete realmente *defraudato* nel vostro intento. Esso anzi manca *intieramente*, perchè voi volevate il tutto e non la parte. *Bonum ex integra causa: malum autem ex quocumque defectu*. La PROPOSTA dunque dell' *intiero* soggetto ed oggetto è la prima condizione assoluta per ben distinguere. La proposta dell' *oggetto* non può dirsi logicamente *intiera* fino a che non lo presenterete con i suoi *estremi*. Vi sono *estremi intrinseci*, ed *estremi estrinseci*. I primi costituiscono l' *unità* delle cose. I secondi ne segnano la *latitudine*, e però più propriamente meritano il nome di *limiti* o di *confini*. Questi però non sono che *rispettivi* alla

nostra *intelligenza* ed ai rapporti che noi sosteniamo colla natura. Col non conoscerli si tralascia di ottenere tutto quel bene che la provvidenza offre alla nostra potenza. Col volerli trascendere si dà di cozzo contro un muro di bronzo. Ma quando si conoscono non si pensa di oltrepassarli. Parlando della prima proposta scientifica io non esigo altro che gli estremi *estrinseci*, perocchè gli *intrinseci* non si possono conoscere se non dopo l'esame.

Non ogni proposta scientifica si può fare colla stessa *facilità*. Questa facilità cresce o decresce a norma del *posto* che la data scienza o disciplina occupa nell'albero enciclopedico. Infatti inoltrandoci in esso si trova in molte parti non solo che i risultati di più scienze antecedenti formano le radici d'una stessa scienza conseguente, ma eziandio che i *limiti* d'una data scienza sono fissati dai limiti delle altre confinanti.

10. La prima proposta puerile e sensibile della matematica è fatta dalla stessa natura coll'averci dato cinque dita per mano e per piede, ed un sole ed una luna che ci illuminano. La prima proposta per lo contrario *filosofica* non può essere dettata fuorchè dalla cognizione profonda delle leggi che governano

la nostra intelligenza. Queste leggi debbono essere esplorate con isperimenti certissimi e concatenati, i quali ci additino i veri limiti della scienza. La proposta data in esame agli apprendenti deve riunire l'apparenza *puerile* ed il *valor filosofico*. Quella deve condurre alla scoperta di questo.

Il *valor filosofico* della proposta deve essere *eminente*, io voglio dire che egli deve virtualmente comprendere *tutta la sfera dell'oggetto*, in modo che l'esame che si farà, somministri i risultati che si ricercano. Dunque la proposta *apparente* dovrà essere espressa in modo da abbracciare virtualmente tutta la sfera suddetta. Una buona *proposta* pertanto non può esser fatta da un mero *erudito* in una data scienza o disciplina, ma solamente da colui che conosce il *valor complessivo* della medesima. Quello che i latini dicevano *vim et potestatem tenere* è così indispensabile, che niuno potrà nè men dare il vero *succo* di un libro senza possedere la materia di cui egli tratta, o almeno senza avere quel colpo d'occhio il quale sappia cogliere le idee fondamentali e radunarle in un compendio ordinato.

Considerando lo *scopo* vero della matematica, essa definir si potrebbe la *logica delle*

quantità. Essa è dunque un' arte razionale. Qui dunque la scienza servir deve all' opera. Il calcolare costituisce appunto quest' opera. La dimostrazione d' un teorema o la soluzione d' un problema geometrico sono un vero calcolo, perocchè ogni raziocinio nel quale si tratti di scoprire i rapporti di qualunque quantità, è un vero calcolo.

In natura si presentano quantità *finite* e quantità *indefinite*. Quando voi pesate una cosa voi maneggiate una quantità *indefinita*. Quando all' opposto misurate una pianta voi maneggiate una quantità *finita*. Nel primo caso dopo avere stabilita l' oncia e il grammo potete ancor suddividerli fino a che l' indice della bilancia non segni alcun movimento ad occhio nudo. Voi potete ancora figurare una bilancia più sensibile e un occhio armato di microscopio che vi segni altri gradi ancora. Dall' altra parte poi l' idea della forza di gravità, alla quale attribuite il peso, non vi presenta verun limite fisso al quale possiate riportare la divisione della quantità. Ciò che dicesi della forza di gravità, dir pur si deve di qualunque altro concetto non circoscritto da limiti conosciuti. Per lo contrario nella misura della pianta vi ha un limite certo, oltre il quale vedete e toccate che essa non

esiste. Qui dunque la quantità può essere *definita*, sia per voi, sia per la formica che cammina su la pianta. Voi usate un metro più esteso di quello della formica. Ma ciò è puramente rispettivo.

Ogni idea *semplice ed isolata* è per se *il-limitata*. Essa non viene circonscritta che col paragone di altre della *stessa specie*. Un suono non limita l'idea d'uno spazio nè un sapore quella di un colore. Col radunare molti odori, molti sapori, molti colori, o molti suoni, non si può nè fondare nè esprimere un calcolo *dimensionivo*. Voi potrete bensì sentire che l'uno è *diverso* dall'altro, o che lo stesso è più o meno gagliardo: ma non potrete misurarne due diversi, e menò paragonarne il più o meno dell'uno con quello dell'altro per determinare l'eguaglianza o la disuguaglianza reciproca, ed ottenere i concetti logici del calcolo *dimensionivo*. Quando ne esprimete molti, altro non fate che annunziare la diversità di tutti con una sola locuzione. Avrete dunque un calcolo *enumerativo* ma non *dimensionivo*.

Il calcolo *dimensionivo* dunque in ultima analisi devesi all'idea dell'*estensione* derivataci dalla vista e dal tatto. Dico anche dal tatto; perocchè (senza entrare in disquisizioni psi-

cologiche e dimostrare la potenza primaria del tatto) osservo che i ciechi nati calcolano quanto i veggenti. Testimonio ne sia il cieco-nato *Saunderson*, il quale meritò di succedere nella cattedra di matematica al celebre Newton.

Ma l'idea dell'estensione, presa vagamente, non determina ancora il calcolo dimensionale. Essa ricerca d'essere *finita e circoscritta*. L'*il-limitato* può, dirò così, servir di *margin*e come il bujo pesto serve di limite ad un esteso illuminato, ma non può costituire un elemento di calcolo. Chiudete gli occhi e poneteli contro il sole o contro una fiamma vicina. Avrete un barlume roseggiante ed esteso ma non *definito* nè circoscritto. Questo ed altri simili soggetti sono sottratti dal dominio delle matematiche.

Hic murus aeneus esto, dice la filosofia a qualunque uomo il quale voglia conoscere tutta la latitudine possibile dell'orbe matematico. Dico dell'orbe matematico, e con ciò comprendo tanto la parte contemplativa quanto l'operativa, tanto la geometrica quanto l'aritmetica, tanto i limiti della quantità escogitabile quanto i limiti dell'algoritmo praticabile. « *L'algorithme* (dice D'Alembert nell'*Enciclopedia*) *selon la force des mots*

signifie proprement l'art de supputer avec justesse et facilité . . . c'est ce qu'on appelle logistique nombrante ou numérale ». L'algoritmo dunque forma in sostanza il calcolo puro aritmetico. Ora per questo calcolo esistono due principj coi quali si fissa la massima *latitudine* sì del suo *oggetto* che del suo *mezzo*; e quindi si determina la massima sfera possibile della sua possanza. Questi principj sono proclamati dai matematici. Col primo si prescrive che le quantità adoperate debbano essere della *stessa specie*. Col secondo che il *nulla* e il *tutto* sono due estremità poste fuori dei numeri, e quindi fuori del regno dimensivo escogitabile. Siam qui permesso di servirmi delle parole proprie di matematici celebri, per indi procedere senza contrasto a quello che son per dire in appresso. « L'unico mezzo di misurare una quantità (dice il celebre Paoli) è quello di riguardare come cognita e fissa un'altra quantità della MEDESIMA SPECIE, e determinare il rapporto di quella a questa (1) ». Questo principio riguarda il mezzo e l'in-

(1) Elementi di algebra, tomo I, pag. 1 e 2. Pisa 1794.

tento d'ogni possibile algoritmo. Esso presenta l'iniziativa del principio dell'omogeneità, del quale ho parlato nel secondo discorso, n.º 29. Se questo principio annunziato da Paoli non racchiude tutte le condizioni *positive* dell'algoritmo in qualità di mezzo termine logico plenario, esso però segna gli *estremi* dell'algoritmo stesso, di modo che dir si deve impossibile, allorchè per misurare una quantità si volesse far uso di una quantità di specie diversa, o che non si potesse tradurre in una specie identica. *Frustraneo* poi diverrebbe l'algoritmo allorchando non servisse a determinare il rapporto domandato. Tutto questo riguarda i limiti della *parte operativa* di tutta la matematica, sia quanto all'intento, sia quanto al mezzo, sia finalmente quanto alla potenza umana nell'occuparsi della quantità.

Passo ora ai limiti ultimi e massimi della *parte contemplativa*. Il celebre Leibnitz in una lettera scritta nel settembre del 1716, ultimo anno della sua vita, esponendo il vero significato dei nomi e il vero valore meramente approssimativo del suo calcolo infinitesimale, dopo d'aver dimostrato che lo zero moltiplicato per l'infinito *darebbe* l'unità, prosegue: « Mais on peut dire que

cela y va , et non pas qu'il y arrive ; car à la rigueur *nihilum* , qui est l'extrémité des nombres en diminuant , devrait ainsi être divisé par *omnia* , qui est l'extrémité des nombres en augmentant. Mais l'*omnia* pris comme *numerus maximus* est une chose contradictoire comme *numerus minimus*. Les deux extrémités *nihil* et *omnia* sont hors des nombres , *extremities exclusæ non inclusæ* (1) ». Qui , come ognun vede , si parla del numero puramente aritmetico o metafisico , e non del vero numero matematico esprimente la quantità fisica escogitabile. I limiti della fisica coincidono con quelli qui tracciati dal Leibnitz. L'idea di quantità estesa sta fra le chimeriche idee del punto inesteso e dello spazio infinito. Al punto inesteso geometrico corrisponde il *nihilum* aritmetico , ed all'*omnia* aritmetico corrisponde lo spazio infinito geometrico.

Detratto così l'esteso illimitato , resta dunque per le matematiche il solo *esteso circoscritto*. Questo è o commensurabile o incommensurabile , vale a dire suscettibile di

(1) Opera omnia , tomo III , pag. 501. Genève apud Fratres Detournes , 1768.

misura coincidente o non coincidente, con un dato *altro* esteso finito e circoscritto, preso come termine di paragone. Ma per ciò stesso che esiste un incommensurabile, esiste un *indefinito* entro certi *confini*. Havvi dunque un indefinito *illimitato* ed un indefinito *limitato*. Il primo è sottratto totalmente dal calcolo: il secondo può andarvi soggetto. Ma atteso la sua *diversità* dal commensurabile, il calcolo avrà alcune leggi *speciali*. Queste leggi proprie dell'incommensurabile soffrono modificazioni subalterne a norma delle diverse specie d'incommensurabilità. Due specie principali d'incommensurabilità s'incontrano; la prima è l'*apparente*, la seconda è la *reale*. La reale poi si suddivide in *omogenea* ed *eterogenea*. L'*omogenea* è quella che, sottoposta al trattamento della moltiplicazione degli estremi e dei medj, vi dà un'identità perfetta fra i prodotti. L'*eterogenea* è poi quella che non somministra questa identità, quantunque vada soggetta a leggi certe, e conciliar si possa coll'unificazione. Senza calcolare l'indefinito *limitato* è impossibile di misurare le forze e le composizioni della natura e delle arti, e anche d'illuminare i risultati che riguardano quei soggetti limitati e finiti, i quali esistono ed

agiscono in uno stato unito e continuo. Il calcolo del finito e dell' indefinito *limitato* sono dunque due parti *integranti* ed essenziali della stessa scienza ed arte, sia integrale, sia differenziale, sia compositiva, sia risolutiva, sia primitiva, sia secondaria. Essi non solamente sono inseparabili quanto allo *scopo*, ma eziandio quanto al *processo*; io voglio dire che non si possono far *succedere* in senso diviso, ma usar si debbono alternativamente secondo l'avvicendamento del *commensurabile* e dell' *incommensurabile*, e si debbono far concorrere in compagna nell'unificazione. Per la qual cosa i due algoritmi debbono essere associati l'uno all'altro per compiere il viaggio, e debbono darsi *mano* per tutta la strada.

Che se la corta nostra potenza e intelligenza non ci permettono di por mente e di usare d' ambedue ad un sol tratto, essi però si debbono far agire d'accordo quanto alle loro leggi ed alla loro tendenza unica *implicita* e *segreta*, senza di che l' operazione è mutilata.

In conseguenza di ciò è facile a vedere che colla vera e piena proposta filosofica si dovrà comporre il soggetto in modo da servire al calcolo *dimensivo* enumerante e al

calcolo dimensionale limitante ad un sol tratto. Una legge fondamentale della intelligenza nostra ci detta questo precetto. Ditemi di grazia: quattro odori, quattro sapori o quattro suoni possono forse come quattro quadrati eguali formare l'idea semplicissima di un *tutto*, simile a quella di un quadrato eguale ai quattro? Più ancora, nelle cose stesse che veggiamo, se con un sol nome non esprimessimo un *complesso* di unità, la numerazione nostra non sarebbe forse perduta? Dunque ciò che dà forma ai concetti aritmetici sono i concetti, dirò così, geometrici, e viceversa, ciò che determina il diverso quantitativo dei concetti geometrici sono i concetti aritmetici. Così dai concetti geometrici deriviamo la numerazione, e coi concetti aritmetici paragoniamo le dimensioni. Senza i concetti *complessivi* geometrici noi non avremmo che concetti *singolari* e isolati. Senza gli aritmetici tutte le grandezze sarebbero *indefinite*. È dunque manifesto che l'una e l'altra specie di concetti si debbano far agire *associati*, altrimenti o non s' intende o non si ritiene nulla.

La proposta adunque filosofica matematica dovrà non solamente servire a questa associazione, ma eziandio renderla sensibile

ed evidente. E cosa di fatto, che l'albero delle matematiche esiste, ed esiste per computare non solamente il *numero* delle esistenze ma eziandio le *grandezze*. Dunque esiste un *germe primitivo* di quest'albero, il quale ha la proprietà originale di somministrare il calcolo. Ora questo germe può esser egli ben raffigurato e posto sotto gli occhi degli apprendenti? Se egli esiste, e se può essere raffigurato, egli dovrà dunque formare il soggetto della *prima* proposta della istruzione matematica. Per giungere alla scoperta di questo germe convien conoscere la *tessitura naturale* del corpo matematico. Questa vi somministrerà l'*orditura* filosofica, e quindi la vera proposta dell'istruzione. Senza di ciò voi scorrete all'impazzata un oceano immenso.

11. Il distinguere logico ha per iscopo la formazione d'idee *distinte* e *adequate* degli oggetti proposti. Queste idee, che dir si potrebbero *secondarie*, formano le ricchezze nostre intellettuali. La loro formazione dunque costituisce una specie di manifattura dei materiali grezzi somministratici dalla natura. Questa manifattura interna ha il suo processo. La *proposta*, l'*analisi*, la *ricomposizione* ne formano le parti. La proposta pre-

senta *tutto* il soggetto ; l' *analisi* lo esamina partitamente ; la *ricomposizione* lo riproduce *distinto* e vestito di segni opportuni a richiamarlo come fu prodotto. Con ciò in ogni parte del regime intellettuale si eseguisciono le leggi del tutto.

Queste leggi sono comuni alla ricerca delle verità tanto di *osservazione* quanto di *speculazione*. Nelle prime dobbiamo molte volte dipendere dalla fortuna. Nelle seconde non dipendiamo che dalla nostra industria. Le verità tutte matematiche si debbono a questa industria, sì perchè il fondo dal quale le ricaviamo sta in noi, ed unicamente in noi, e sì perchè la semplicità degli oggetti sui quali versano, ci dispensano da certe operazioni che sono richieste dalle materie che ci vengono dai sensi. Ma dall' altra parte ciò importa di leggere dentro di noi, locchè viene sempre dall' uomo fatto con ritrosia. Da ciò sorge una primitiva difficoltà, alla quale si aggiunge anche quella, che ciò che è abituale e a noi vicino, passa inosservato e non viene avvertito che per un caso.

Le idee matematiche portano seco queste difficoltà più delle altre tutte, per essere appunto tutte psicologiche ed ontologiche. Quindi se la vostra istruzione comincia con

un' aria *sintetica* , come si suol fare , si toglie , dirò così , il discernimento logico , e si spegne il lume ; e quindi si va brancolando. Oltre ciò in progresso avviene un positivo fallimento della scienza. Coi dettami *generalì* voi altro non determinate fuorchè qualità o leggi più o meno *comuni* secondo il punto di vista più o meno eminente dal quale contemplate il vostro soggetto. Ma in questa prospettiva, a misura che salite ad una maggiore *generalità* voi perdetes in proporzione la *realità* che sta nel concetto vero particolare connesso e continuo , sotto il quale le cose esistono in natura ; talchè la *massima generalità* si risolve in una *massima nullità*. L'unico pregio che hanno queste generalità si è quello di somministrarci il *filo* per discendere, ma ciò non serve che per gli *intelligenti* , cioè per coloro i quali gradualmente prima salirono al vertice della piramide , e non per coloro i quali rimasero al basso o salirono a slanci.

L'aria dunque *sintetica* deve essere bandita dalla primitiva istruzione come la più micidiale al ben distinguere. Quest'aria consiste appunto nel dare proposizioni , problemi e teoremi come si suol fare , i quali tacitamente involgono concetti non prima generati nè distinti. Quest'aria consiste ancora

nel piantare lì secca secca la dimostrazione e passare ad un'altra *inaspettata*.

12. Col *distinguere* si genera le ricchezze intellettuali, col *connettere* si *cumulano*, e coll'*esprimere* si *assicurano* e si *maneggiano*. Queste ricchezze sono di quattro specie, cioè buone *definizioni*, buone *divisioni*, buoni *principj* e buone *regole*. Ciò è comune a tutta sorta di scienze e di discipline. La definizione altro non è che l'enumerazione dei caratteri essenziali d'una cosa qualunque. Essa è dunque *frutto* dell'esame fatto, e non principio del medesimo. Le definizioni quando sono ben *generate*, sono anche ben intese e ben possedute. Ma se non si veggano, dirò così, spuntare e formarsi sotto alla mano, esse non si possono insinuare nella mente nostra in modo da servire a tutti gli ufficj dello scibile.

Col ben distinguere si prepara il ben *connettere*. La buona connessione non si restringe solamente a collegare le idee secondo i veri loro rapporti, ma eziandio ad *estendere* convenientemente il legame a tutto il soggetto esaminato. Ogni buona *connessione* scientifica dunque deve essere *naturale*, *graduata*, *completa*. Essa è *naturale* quando è indicata e sospinta, dirò così, dalla forza stessa dei

rapporti logici del soggetto. Ogni altra connessione dunque è una appiccicatura, non una connessione naturale. Deve in secondo luogo essere *graduata*. Il *saltuario* è contro natura. Ogni lacuna è un posto d'ignoranza ed una causa di errori, o almeno di frustrazione dello studio fatto. La fecondità di una scienza risulta precipuamente dal concorso delle idee *relative*. Ma queste esigono la presenza avvicinata di *tutti* i termini di paragone. Questa presenza vien tolta col progresso *saltuario*. Dunque senza la connessione graduata non si può ottenere la vera feconda ed intiera scienza. Essa finalmente non si ottiene fermandosi a mezza strada come è per se evidente. La catena dunque scientifica deve abbracciare da *capo a fondo* il dato assunto. Con ciò la connessione diventa *completa*.

E qui si presenta una considerazione precipua e decisiva per la possanza e verità di tutta la scienza. Ditemi di grazia: come sciogliete voi nella matematica la più sublime ogni specie di problemi sì determinati che indeterminati, se non se prevalendovi delle leggi più o meno generali delle quantità. Ora vi domando io; d'onde traete voi la *cognizione* di queste leggi, se non che dai particolari dai quali scartate ciò che hanno di

proprio per non ritenere se non ciò che hanno di comune. Perchè dite voi allora che sono generali? Se non perchè le giudicate comuni a tutti i casi particolari. Ma come figurar vi potete l'esistenza e le circostanze di questi casi nella matematica pura? Esiste forse un mondo matematico coniato dalla causa prima, come esiste un mondo fisico fabbricato e conservato da lei? Io ho già avvertito fino dal principio, che la matematica pura non ha niente fuori di lei che la rappresenti, e niente dentro di noi che ce la suggerisca. All'opposto il primo aspetto delle matematiche rassomiglia ad un deserto o ad un oceano sterminato, nel quale non sappiamo da qual parte rivolgerci. Sappiamo per altro che la famiglia tutta degli enti matematici ha uno stipite solo, e che le condizioni sue sono indicate, purchè ci prendiamo la briga di esaminarla da vicino e di seguirne docilmente il filo. Col fare scavi intorno ad una ricca miniera, o col razzolare nell'arena, nella quale l'acqua porta piccoli frammenti di minerale, voi certamente ricaverete sempre qualche cosa. Ma queste minuzie non compensano le spese e le fatiche che voi impiegate. Egli è vero essere cosa più comoda razzolare che aprire una galleria; ma è vero

del pari che accidentale è la scoperta nel razzolare , e sterilissima la fatica e gettato il tempo. Se a dirittura vi foste impossessato del filone , le vostre ricerche non sarebbero state casuali , e le vostre cure sarebbero state largamente ricompensate.

Coi metodi attuali voi razzolate per l'arena , e svolgete casualmente il terreno finitimo alla miniera della scienza ; e però con un' arte lunga , con una vita breve e con un' improba fatica raccogliete qualche frammento della vera ed utile disciplina.

Ora se il vostro esame fosse stato *indicato, graduale e pieno*, egli è certo che avreste ottenute due cose ad un sol tratto. La prima che non vi sareste perduto in indagini di riuscita impossibile, e la seconda, che avreste raccolto netto il frutto che il vostro soggetto vi poteva prestare. Ma colla maniera interrotta e saltuaria si ottengono forse queste cose? La *pienezza* delle scienze matematiche non si potrebbe asserire che in via d'una *estrinseca e vaga presunzione* tratta dal gran numero de' suoi passati e presenti coltivatori. Ma questa presunzione svanisce quando uomini sommi e di buona fede trovano lacune, e confessano che rimane ancora a far qualche cosa. Ora il primo mezzo a togliere le lacune

consiste nel processo primo e graduale di cui parlo qui.

13. È cosa impossibile in tutti i soggetti, ma specialmente negli invisibili e meno usati, di ben distinguere e ben connettere senza la conveniente *espressione*. Qui l'espressione non si restringe solamente alla *verbale*, ma abbraccia eziandio qualunque *rappresentazione* ed *associazione* ad un segnale che richiami fedelmente un dato concetto. Due sono gli ufficij dell' *espressione*. L' uno interviene nella funzione di distinguere, e l' altro in quella di connettere. In quella di distinguere essa lega l' idea o il concetto separato ad un segnale estrinseco. Con ciò non lo lascia più ricadere nella massa compatta dalla quale fu estratto, ma invece lo fa comparire in grembo della medesima colla sua forma *distinta*. Il secondo ufficio poi si è quello di prestare all' anima le *redini*, dirò così, per maneggiare a nostro beneplacito questi estratti; e quando ne facciamo un composto, di vestire con segni questo nuovo composto. Per la qual cosa il processo ultimo e permanente delle operazioni nostre mentali si compie colla espressione. La parola mentale è perduta, e la ragione umana è spenta senza l' espressione.

- La matematica poi abbisogna (come avvertii sul principio di questo scritto), almeno nei primordj dello studio, d'una *duplice* espressione, cioè della *simbolica* e della *letterale*. Senza di ciò ella non ha che larve sformate, smilze fantasime, profili spolpati, e quindi tentami imperfetti e conati impotenti: ciò non è tutto: la parola stessa usata, costa una fatica ed una contenzione di mente, della quale pochi sono capaci, e che pochissimi amano d' incontrare.

Da tutto ciò è manifesto che le funzioni di distinguere, di connettere e d' esprimere intervengono in ogni parte dei processi logici. Esse sono associate in modo che l'effetto loro si può dire *solidale* di tutte. L'operazione prende ora un nome ed ora un altro, ma in atto pratico le tre funzioni suddette intervengono sempre ed operano congiunte. Ciò posto, debbono essere tutte e tre *perfette* nel loro genere; altrimenti il difetto di una si comunica alle altre due, e l'effetto che ne nasce non è la buona scienza, ma un ceutone, una larva, un mostro o un rottame e nulla più. Allora questa specie di scienza diventa peggiore dell' ignoranza, specialmente nelle materie le quali regolano gli affari umani. Per la qual cosa apparisce che

tutta la parte *dimostrativa* dell' *istruzione* riducesi a quattro gran funzioni , cioè :

- I. Ben proporre ;
- II. Ben distinguere ;
- III. Ben connettere ;
- IV. Ben esprimere.

Dico la parte dimostrativa dell' *istruzione* ; perocchè nell' *invenzione* si aggiunge la ricerca dei *fatti* i quali somministrano la scoperta e ne provano la verità. Tutte le scienze hanno più o meno bisogno di questa ricerca ; e però a tutte è necessaria la sua *logica critica* , cioè l'arte di verificare i *fatti*. Allora si comincia colle osservazioni singolari : indi seguono gli aforismi comprovati , e finalmente si conchiude col corpo del sistema.

Quando una scienza non è giunta alla sua pienezza, ha sempre luogo l' *invenzione*. Le buone invenzioni debbono sempre prendere la mossa *ab ovo*, e non fidarsi di ciò che è stato detto o fatto dagli altri. Così si ha sempre il vantaggio o di fare nuove scoperte, o almeno di comporre i dispareri di coloro che non conobbero fuorchè alcuni profili delle verità. Trattando io della sola *istruzione* credo che si debbano somministrare anche i sussidj primi dell' *invenzione*.

- 14. Tutto il fin qui detto riguarda le grandi

parti dell' insegnamento. Noi abbiamo accennato in generale quali siano, in che consistano, e come debbano essere esercitate. Ora ci resta a ritornare sopra due cautele, le quali ai dì nostri, e forse da parecchi secoli in qua, si son rese più che mai necessarie onde acquistare per se e comunicare agli altri la scienza, e rendere il calcolo efficace. La prima di queste cautele consiste nel determinare il GRADO DI APPROSSIMAZIONE O DI DISTANZA dal quale contempliamo gli oggetti della scienza, e quindi determiniamo i precetti dell' arte. La seconda consiste nelle COSTRUZIONI tanto dei simboli, dai quali dedurre si debbono le *affezioni* e le *leggi* sì geometriche che aritmetiche della quantità fisica escogitabile, quanto dei *modelli* delle diverse *funzioni* algoritmiche conseguenti.

Massimi, decisivi e perentorj sono questi argomenti; perocchè dall' averli o non averli avvertiti, od anche solamente trascurati, derivarono tutte le difficoltà, tutte le confusioni e tutte le lacune rimproverate alla matematica. Amendue queste cautele riguardano la *posizione* degli oggetti dello studio e dell' insegnamento. Dico la *posizione* e non la *Proposta*; imperocchè colla *Proposta* si può di fatto prendere una *posizione* o vicina, o

lontana , o competente , o incompetente , o confacente , o ripugnante sia all' indole delle cose , sia alla possanza ed alle leggi della nostra intelligenza. La posizione dunque di cui parlo qui , forma una *condizione* della Proposta.

Questa posizione vien qui considerata pel suo solo *effetto logico* , cioè per facilitare le ricerche e renderne proficui i risultati. Quando voi insegnate ad un geometra la posizione ch' egli deve prendere per rilevare l' aspetto superficiale di un paese , voi non vi proponete altro scopo che la dimensione ; e quindi non assumete in considerazione altri mezzi che quelli che sono necessarj onde ottenere questo scopo. Lo scopo d' ogni algoritmo consiste nella valutazione. La valutazione dunque è l' effetto che conviene produrre. La posizione deve essere *correlativa* a questo effetto , vale a dire deve essere presa in modo che la potenza umana possa produrre quest' effetto , e produrlo nella maniera la più facile , la più breve e la più proficua. L' idoneità dunque della posizione , e quindi degli algoritmi , forma in ultima analisi l' oggetto proprio della presente disquisizione.

Ciò premesso , io domando in primo luogo quale sia il vero punto di vista intellettuale.

sotto del quale si debbono presentare gli oggetti della matematica onde ottenere la piena scienza e il calcolo efficace? Qui non si tratta della intrinseca forma delle cose, ma bensì della veduta più o meno astratta, più o meno generale degli oggetti logici. — Tutto considerato, si può rispondere coll'avvertimento che diede Dedalo ad Icaro suo figlio: *Inter utrumque vola, medio tutissimus ibis*. La ragione applaude a questa massima; ma ciò fa per una rimota analogia, anzi che per un' esplicita e fortemente ingerita convinzione. Affine di preparare questa convinzione siami permesso di ripetere e di sviluppare ciò che ho detto altrove su di questo proposito. Incomincio dall' algoritmo.

15. Il signor Wronski pretende d'aver trovato l' algoritmo sovr' algebrico, anzi l' algoritmo degli algoritmi tutti algebrici, cogniti ed incogniti. Quando ciò sia vero, parmi che potrà far onore al vigore del di lui cervello; ma domando se questa scoperta potrà essere proficua per l' esercizio pratico. *Nisi utile est quod facimus, stulta est gloria*. Altro è dire infatti che tutti gli algoritmi abbiano qualche cosa di comune, ed esprimere questi caratteri comuni, ed altro è insegnare gli algoritmi proprj e necessari alle diverse esi-

genze della valutazione. Sarà certamente utile toccare il vertice della piramide, ma sarà assolutamente *necessario* mostrare come si salga e si scenda tutte le volte che ne' diversi gradi cogliere si debba il frutto bramato. Col sorvolare e col volteggiare soltanto nell'atmosfera delle somme generalità non si può far nascere la vera scienza, e meno poi l'arte efficace, ma si fa sfumare la prima e mancar la seconda. A furia infatti di generalizzare si passa all'altro estremo d'un'ignoranza sistematica.

Raccogliete un raggio solare in un prisma di cristallo. A piccola distanza dietro il prisma i colori appaiono ancor confusi; ad una mezzana distanza appaiono distinti e vivaci; ad una maggiore s'illanguidiscono, talchè in fine ad una assai grande, sfumano e si confondono. Allorchè Herschel inventò il suo telescopio, un celebre calcolatore provò che per mezzo di esso si avrebbe potuto facilmente vedere un vulcano od altri simili oggetti nella luna. Ma altri matematici fecero osservare che, oltre un certo segno, i raggi dilatati della luna fanno ritornare la confusione, e che le leggi dell'ottica hanno un medio cui non si può oltrepassare. Ecco un'immagine perfetta della vista intellettuale

umana e del rispettivo valore delle astrazioni più o meno generali colle quali noi vogliamo creare la scienza, e sulle quali intendiamo di fondare la teorica delle arti, e quindi dedurne le regole.

La generalità eccessiva se è perniciosa alle scienze, riesce micidiale alle arti. Si può pensare in astratto, ma non si può operare che in concreto: si può vedere le cose in generale, ma non si può agire sulle cose che in particolare. Ma siccome si vuol sapere per agire, così convien prendere una posizione *di mezzo*, la quale soddisfi alle esigenze sì del sapere che dell' operare. Il sapere esige di astrarre e di generalizzare, stante che senza di ciò saremmo costretti a trascinarci sempre fra i concetti particolari e staccati, e quindi saremmo di condizione o pari o inferiore a quella dei bruti. Ma l'astrarre e il generalizzare si fa sempre a *spese* dei veri concetti naturali delle cose, talchè a proporzione che un' idea è più astratta e generale, tanto meno essa contiene di caratteri e di circostanze reali. Niente in natura esiste o si fa in astratto ed in generale, ma tutto esiste e si fa in concreto ed in particolare. Niente in natura esiste o si fa in senso diviso o interrotto, ma tutto esiste e si fa

in senso unito e continuo. Se dunque da una parte l'uomo abbisogna di rappresentar più cose ad un sol tratto; se queste rappresentazioni a guisa di monogrammi e di centri di richiamo sono indispensabili alla nostra comprensione, egli ne verrà che sublimati fino ad un certo grado, potranno soddisfare allo scibile ed al praticabile, ma spinti più oltre non serviranno più nè all'uno nè all'altro intento. La moderazione dunque deve presiedere al vero sapere che si trasmette agli uomini, come deve regolare il loro commercio.

Per questo mezzo si coglie il *complessivo* nel quale sta il vero fatto, il vero utile, il vero forte. La scienza degli *estremi* e dei *medj* è scienza eminentemente lucida, eminentemente potente, ed eminentemente proficua. In essa sta la vera *sapienza* nel senso rigoroso nel quale fu presa dagli antichi. La scienza degli *estremi* e dei *medj*, della quale parlo ora, non è l'algoritmo di cui usano i matematici nel trattar le proporzioni, ma una scienza tutta *di fatto* puramente naturale. Essa consiste nella cognizione di quella legge suprema, universale e indeclinabile, colla quale veggiamo che la natura governa tutti gli esseri a noi conosciuti. Il detto che

gli estremi si toccano senza confondersi esprime una particolarità di questa legge. La condizione più importante di lei consiste nel far trovare nel mezzo la massima concorrenza di azione e di riazione, e quindi la massima possanza, la massima sapienza e la massima bontà complessiva (1). La vera bontà assoluta di tutto lo scibile e di tutto il praticabile umano non si può dunque determinare che in vista del tipo di questa legge. La maggiore o minor bontà, possanza e facilità dello scibile e del praticabile dovrà dunque risultare in ragione dei gradi di minore o maggiore distanza, di maggior o minor conformità con questo tipo.

Giova dunque cogliere gli estremi, ma per arrestarsi al mezzo ed agire col mezzo. Spingasi adunque pur il volo dell'ingegno fin dove giunger può; ma quando si tratta di ben sapere e di ben insegnare conviene incominciare dal mezzo; e se fa bisogno di toccare gli estremi convien scendere o salire a questo mezzo senza sorpassare giammai quella distanza dalla quale si possono e si debbono cogliere i pieni concetti delle cose.

(1) Vedi Discorso 3.^o, n.º 8 e 9.

Ciò che dico della scienza deve con più forte ragione praticarsi nelle arti, e soprattutto allorchè si tratta di quelle di un uso importante ed universale.

16. Poste queste massime, domando quale sia la conseguenza che dedur possiamo dai recenti esempi di due celebri calcolatori, Kramp e Wronski? Il naufragio del primo ed i voli del secondo ci conducono allo stesso risultato e ci somministrano la stessa lezione. Kramp, usando l'algoritmo algebrico conosciuto è stato condotto a tante mostruosità, che ha emesso la confessione, cui abbiamo riportato nel secondo discorso (1). Wronski, a forza di sublimare l'algoritmo fino all'assoluto, è giunto a renderlo *nullo*. La prova di questa sentenza la ricaviamo dalla bocca stessa del suo autore. Eccola: « Il se pré-
« sente même ici une observation majeure :
« c'est que la résolution théorique des cas
« particuliers des équations des différens
« genres dépend entièrement du hasard ; et cela
« précisément parce que ces cas particuliers
« sont indépendans entre eux et de tout
« procédé général, comme nous l'avons déjà

(1) Vedi Discorso 2.^o, n.^o 29.

« remarqué en donnant la déduction de la
 « Technie de l'algorithmie. Nous le répétons,
 « tout ce qu'il y a de général dans la ré-
 « solution théorique des équations, ainsi
 « que dans toute la théorie de l'algorithmie,
 « se trouve donné par les loix fondamen-
 « tales que nous avons assignées aux diffé-
 « rentes branches de cette théorie : on ne
 « saurait aller au-delà ; et jamais on n'aura
 « des loix ou des procédés théoriques *géné-*
 « *raux* différens de ceux que nous avons
 « déterminés. -- La certitude absolue de
 « cette assertion est fondée sur les principes
 « inconditionnels desquelles dérivent les loix
 « théoriques dont il s'agit (1).

Grazie sien rese al signor Wronski, il
 quale con queste ed altre simili dichiara-
 zioni ci ha rivelato la nullità completa delle
 sue formole algoritmiche dedotte dalla con-
 siderazione delle somme ed ultime generalità.
 Grazie siangli pur rese per la causale che
 egli adduce di questa nullità, benchè questa
 causale sia assolutamente antilogica. Mi si
 domanderà da quale titolo di ragione io derivi

(1) Introduction à la philosophie des Mathématiques,
 pag. 261-262.

questo giudizio. Prima di rispondere categoricamente mi si permetta di domandare se sia vero o no che il signor Wronski abbia confessato con tutto il mondo, che lo scopo d'ogni calcolo consiste nell'ottenere le misure o le valutazioni da noi domandate? Qual è il mezzo per ottenere questo scopo, se non che l'algoritmo? In che consiste l'essenza dell'algoritmo, se non se nella virtù, nella possanza, nell'efficacia a farci ottenere il suddetto intento? Senza quest'efficacia che cosa l'algoritmo diventa, fuorchè una spada che non taglia, uno stromento che non suona, un interprete che non parla; in breve un mezzo futile, incompetente e nullo? Ma d'onde l'algoritmo trar può la sua virtù e la sua efficacia, se non che dalla qualità degli oggetti e dalle leggi naturali e indeclinabili del nostro intendimento? Dunque oziose ed incompetenti sono le considerazioni colle quali si *prescinde* dal concetto intero e pratico delle leggi di questo intendimento applicato alle quantità matematiche.

Io mi riserbo nel Discorso sesto di porre in chiaro la maniera di vedere del signor Wronski in fatto di filosofia. Allora il Pubblico vedrà che altro egli non ha fatto che seguire a puntino il solito costume di

tutti i Kantisti. Essi senz'altri apparecchi escono dal mondo e s'inabissano nel trascendentalismo, per ivi cercare la pietra filosofale dell'assoluto. Quando credono di possederla rientrano nel mondo, ed a costo di far i pugni col pieno vero, pretendono che all'assoluto si assoggetti ogni cosa. Scorrete le opere degli scolastici del medio evo; esaminate la loro maniera di vedere, di parlare, e perfino di tessere alberi di idee, e e voi v'accorgerete tantosto ch'essi rassomigliano ai moderni trascendentalisti e specialmente al signor Wronski. Così adoperando, si fa precisamente retrocedere la scienza, e si riconduce lo spirito umano ad una seconda ignoranza peggiore della prima. Nella prima i concetti delle cose riescivano incompetenti per mancanza di distinzione: nella seconda lo sono per mancanza di pienezza. La prima ignoranza presentavasi con lineamenti grossolani: la seconda si annunzia con viziose dicotomie. Ma nella prima ignoranza si aveva la *realità*, e non mancava che la distinzione: oltracciò, progredendo, si poteva cogliere il distinto senza sorpassare il reale. Nella seconda ignoranza per lo contrario si abbracciano quasi le sole nuvole, e progredendo si allontana vieppiù dallo

stato reale delle cose e dalle condizioni necessarie alla potenza logica umana.

Per buona sorte la matematica, specialmente pratica, è cosa che non può soffrire travisamenti: e però trattandosi delle equazioni, non si possono far valere algoritmi *frustranei*. L'assoluto quindi deve contentarsi di un primato di puro nome, e d'investire i suoi seguaci del possesso delle campagne dei poeti di Arcadia. Tutto ciò è in regola, nè può accadere altrimenti, perocchè col disfare non si fabbrica, e collo sciogliere non si tesse.

Voi dite che i casi particolari sono indipendenti fra di essi e da ogni procedimento generale. Distinguiamo la diversa possibilità astratta di questi casi dalla diversa possibilità delle leggi logiche ai quali possono andar soggetti. Le forme e le combinazioni materiali possono essere indefinite; ma le leggi algoritmiche sono essenzialmente limitate, certe e costanti. Le combinazioni dei vocaboli sono indefinite: si dirà per questo, che le leggi del parlare siano indefinite, e che le regole gramaticali siano indipendenti da ogni procedimento generale? Questo scambio non si può verificare fuorchè nel regno del caos e della notte, ma non nell'uni-

verso esistente, nel quale tutto è sottoposto a leggi determinate e semplici, così che si può dire con Fontenelle, che la magnificenza sta nel disegno ed il risparmio nell' esecuzione.

Alla per fine, che cosa sono in se stesse queste leggi algoritmiche, fuorchè leggi logiche, leggi psicologiche, leggi di ragione, leggi dell' uomo interiore? Voi, voi stesso ce lo dite al principio del vostro libro. « Il
« *fant savoir qu' il existe, pour les fonctions*
« *intellectuelles de l' homme, des lois dé-*
« *terminées. Ces lois transcendentes et lo-*
« *giques caractérisent l' intelligence humaine,*
« *ou plutôt constituent la nature même du*
« *savoir de l' homme. Or en appliquant ces*
« *lois, prises dans leur pureté subjective*
« *à l' objet général des mathématiques, à*
« *la forme du monde physique, il en re-*
« *sulte, dans la domaine de notre savoir,*
« *un système de lois particulières que régis-*
« *sent les fonctions intellectuelles spéciales*
« *portant sur l' objet de cette application*
« *sur le temps et l' espace. Ce sont ces lois*
« *particulières que constituent les principes*
« *philosophiques des mathématiques, prin-*
« *cipes que nous avons nommés »* (1). Ciò

(1) Introduction à la philosophie des Mathématiques, pag. 2.

posto, ne viene la conseguenza, o che tutte le buone teorie in ogni ratno possibile dell'umano sapere si riducono ad una sterile speculazione, o che esse regolar debbono i casi contingibili entro la sfera del consueto al quale esse si estendono. Larghissima riesce questa riflessione per la matematica, nella quale non si tratta che delle pochissime leggi della misurazione, e nella quale la posizione dei fatti non importa l'arte congetturale necessaria alla storia reale fisica morale e politica.

Fra l'algoritmo e la gramatica avvi la più grande somiglianza. Come l'algoritmo è l'arte di supputare con giustezza e facilità, così pure la gramatica è l'arte di parlare con giustezza e facilità. I nomi rappresentano le quantità sostanziali; i verbi le loro funzioni. Le altre parti dell'orazione poi rappresentano le affezioni, i rapporti e le combinazioni dei concetti matematici. Facile mi sarebbe di provare questa somiglianza, come utile l'eseguirlo. Questa verità risulta dalle cose dette da Condillac nel suo libro intitolato *Langues des Calculs*, nel quale se non troviamo questo ravvicinamento, si può ciò non ostante ricavarne. I parlari degli uomini sono infiniti, ne' può mente umana

comprendere in quante forme particolari si possano accozzare i particolari concetti e le loro espressioni. Dovremo noi dunque dire che la risoluzione pratica dei casi gramaticali dipenda intieramente dall'azzardo? Fino a che si mescolerà lo sfrenato escogitabile col reale contingibile, fino a che si confonderanno le esistenze possibili dei fatti colle leggi logiche dell' umana ragione, e si userà ed abuserà delle viste sommamente astratte e generali, si commetteranno questi peccati. Oltre ciò non si comprenderanno mai i principj solidi e le vere leggi delle cose, se non si tralascerà il costume di affrontare ex abrupto le scienze, e non si avrà la pazienza di procedere socraticamente; ma per lo contrario non si farà che oscurare e traviare.

17. Lasciamo la falsa causale allegata dal sig. Wronski dell' inefficacia del suo algoritmo, e ricerchiamo da che veramente proceda. Come è impossibile di effettuare la valutazione con dati *incompatibili*, così pure è frustraneo il tentarla con dati *insufficienti*. La prima parte di questa proposizione fu ampiamente provata nel Discorso secondo. Quanto alla seconda parte, ella è per se manifesta, pensando che un mezzo insufficiente non può procacciare un fine plenario. Ma

così è che una formola troppo astratta e generale non vi somministra punto i dati sufficienti, ma anzi ve li toglie; dunque con una formola troppo astratta e generale rendesi frustraneo ogni tentativo d'una piena e perfetta valutazione.

Ma quale sarà la formola troppo astratta o troppo concreta, e perciò incompetente, e quale la formola competente? Ogni formola altro non è che un'indicazione più o meno diretta di una data nostra maniera di operare. Tutte le arti hanno le loro formole, come tutte le scienze possono avere le proprie. Principiando dal cuoco, dal farmacista, dal tintore, e giungendo fino al sommo matematico, al sommo filosofo e al sommo politico, tutti hanno o possono avere le loro formole. *Regole, canoni, formole, ricette, processi, module*, ec. ec., esprimono in sostanza la stessa cosa. Esse contengono il *magistero* o parti del *magistero* dell'arte; o almeno segnano i dati *immediati*, dai quali si può tosto ricavare il *magistero* suddetto. La formola è giusta quando ci fa conoscere con verità. La formola è buona quando ci fa operare con effetto ed ottenere l'effetto inteso.

Ma la formola è data per essere applicata, come sta: senza di ciò non è completa. La

formola è uno stromento, il quale, se abbisognasse d'essere ancor ridotto ad uso dell' uomo, non meriterebbe il nome di formola, ma di *principio* di una formola. Concedo che una formola può essere più o meno speciale; ma essa dovrà essere sempre di un uso *immediato*. La brevità, la facilità e l'applicabilità a tutti i casi di una data sfera sono *pregi* della formola. Essi ne costituiscono la *perfezione*.

Io ho già accennato in che consista lo spirito delle formole matematiche, e la topica che ne nasce (1). Ora rispondendo alla fatta domanda, quale sia la formola competente, dico che competente dir si deve quella formola la quale soddisfa all'ufficio a cui è destinata; incompetente quella che non vi soddisfa. — Ma quale è l'*ufficio* proprio ed immediato al quale è destinata la formola? Indicare la maniera pronta e sicura di ottenere la data cognizione, di produrre il dato effetto. Ma nel regno razionale a che ridur si può quest'ufficio delle formole? Nell'indicare il *mezzo* pel quale dal cognito si possa procedere all'incognito, e con dati ammessi

(1) Vedi Discorso 3.º, n.º 6.

come certi acquistare la cognizione di una incognita verità, o confermarne la dimostrazione. La formola non è una storia o una dottrina spianata, ma dove si tratta di conoscere, altro non è che uno strumento per acquistare una cognizione bramata. Somministrarci dunque il mezzo efficace, costituisce il vero ufficio, e quindi la vera competenza, il vero valore, il vero merito di una formola scientifica. Parlando dunque del mondo intellettuale, il valor d'una formola si ridurrà a somministrarci il *mezzo termine logico* di una scoperta o di una dimostrazione, o almeno nell'indicarci il modo sicuro e pronto di cogliere questo mezzo termine (1).

Qual è la conseguenza che deriva da tutto questo? Che incompetente sarà in matematica quella formola la quale ci toglie la vista del mezzo termine logico sia coll'allontanarci da lui, sia col non condurci a lui. Ma il troppo generale e il troppo compatto producono questi effetti; dunque le formole troppo generali o troppo compatte sono for-

(1) Che cosa sia questo mezzo termine io l'ho spiegato nel Discorso 3.^o, n.^o 14.

inole incompetenti. Volendo fissare i requisiti delle formole *competenti*, osservo che noi abbiamo già annotato nel calcolo intervenire tre cose, cioè gli oggetti, le logie e i movimenti (1). Le formole in ultima analisi riguardano i *movimenti* nostri intellettuali, e propriamente quelli dell'attenzione, la quale costituisce il vero potere esecutivo razionale. Sebbene le formole vengano esibite alla facoltà di *conoscere*, esse veramente si riferiscono alla facoltà di *eseguire*. Esse vengono presentate alla facoltà di conoscere, perchè non esiste altro modo possibile per farle passare alla facoltà di eseguire.

Agire è lo stesso che produrre un dato effetto e non un altro. Un *solo* di questi effetti produr si deve. Gli altri debbono essere scartati. Escludere l'*arbitrario*, ecco l'ufficio primario *negativo* di una buona formola. Somministrare il mezzo efficace all'intento proposto, ecco l'ufficio suo *positivo*. L'*arbitrario* deve essere escluso, perchè il vero non è che un solo, e però ogni altro concetto diverso non è quello che vogliamo ottenere, ma che anzi vogliamo sfuggire. La

(1) Vedi Discorso 1.^o, n.º 18, 19, 20. Discorso 2.^o, n.º 22, 23.

moralità del vero ha le sue leggi certe, necessarie, eterne, come la moralità del utile; e però come vi sono diritti e doveri esterni per le azioni, vi sono pure diritti e doveri interni per i pensieri. Col prefinire i modi certi coi quali entro la sfera del consueto debba la mente umana procedere, ecco in che consiste l'ufficio immediato d'una buona formola. Con ciò ad un sol tratto si esclude l'incompetente e l'arbitrario, e si indica il mezzo termine confacente all'uopo.

Facile riesce l'escludere l'incompetente, perchè si tratta di un ufficio *negativo*. Più difficile riesce di escludere l'arbitrario, perchè importa di *scegliere* fra le diverse maniere di agire quella che meglio conduce allo scopo proposto. Scegliere un modo qualunque di agire importa di preferirne uno e di lasciare gli altri. La preferenza *doverosa* poi importa la *necessità* di appigliarsi all'una, e di escludere le altre tutte. Ma per preferire in questa maniera convien conoscere il merito della cosa trascinata. Ora in matematica chi ci condurrà a questa cognizione? O per parlare più in particolare, chi ci guiderà a ritrovare le formole algoritmiche, escludenti ogni arbitrario procedimento, e conducenti più facilmente alle valutazioni?

A questa questione fu già risposto nel n.^o 22 del Discorso antecedente, al quale mi rimetto.

18. Veniamo al positivo. Il sig. Wronski pretende d'aver trovato la formola massima ultima ed immutabile di ogni algoritmo algebrico, e pretende che le formole tutte si risolvano nella sua. Dall'altra parte consta di fatto esistere per le equazioni, almeno fino al quarto grado, un metodo di soluzione. Malgrado ciò, il sig. Wronski sostiene che l'algoritmo delle equazioni sia commesso al caso. Il motivo di questa sua sentenza è fondato sul riflesso che l'algoritmo delle equazioni sia indipendente da ogni procedimento generale, come l'esistenza di ogni caso comparisce a noi indipendente dall'esistenza dell'altro caso. Qui v'è uno scambio di termini ed una falsità di fatto. Primo, scambio di termini, perchè non si tratta dell'esistenza o della posizione dei casi e dei problemi, ma bensì della *maniera* colla quale si possono sciogliere. Ciò posto, qui si scambia l'oggetto materiale dell'algoritmo coll'oggetto logico del medesimo. Infinite possono essere le suonate che si presentano ad un perito esecutore; e queste tutte indipendenti le une dalle altre. Dirò io dunque che sarà puro caso che egli le eseguisca a dovere?

Dico in secondo luogo, che la causale del sig. Wronski inchiude una falsità di fatto. Quando si presenta a taluno un problema, un quesito, un caso da sciogliere, che cosa si fa dal proponente, e che cosa dal rispondente? Il proponente domanda la soluzione, cioè domanda di conoscere una cosa che egli non vede. Che cosa far deve il rispondente? Prima esaminar bene le condizioni del quesito; secondo, trovare il *mezzo termine* della risposta; terzo, finalmente tessere in via di risultato la risposta sull'oggetto domandato. Ecco il processo logico nella soluzione di qualunque caso matematico; qualunque nome piaccia di dare alle parti di questo processo, la sua sostanza è quella che ora con vocaboli più comuni e più noti generalmente ho qui indicata. Posto ciò, io domando in che si risolva la possibilità della soluzione del quesito, fuorchè nella possibilità di trovare il *mezzo termine* della risposta? Ora questo mezzo termine è racchiuso nelle date condizioni o no. Se è racchiuso, la soluzione è possibile; in caso contrario, impossibile. Ma il sig. Wronski parla di casi di soluzione intrinsecamente *possibile*, e per i quali appunto egli dice aver trovato le formole eterne, benchè in

pratica inapplicabili. Ristretta la considerazione a questi casi, io domando se la formola esposta teoricamente da lui, sia almeno analoga al procedimento effettivamente praticabile? Se risponde di sì, dunque altro non resta che vestire la formola generale colle circostanze che i diversi ordini di equazioni esigono, e così assoggettare le leggi algoritmiche ad un solo sistema concatenato, unito, continuo. Se poi mi risponde che il procedimento indicato dalla formola universale non è almeno *analogo* all'algoritmo delle equazioni praticabili, allora soggiungo francamente che il suo algoritmo è un vero castello in aria. Aggiungo di più, che a torto egli gli attribuisce il nome di *generale*, perocchè non ha quella virtù e quella influenza che procacciar gli può il titolo di generale. Il generale e il particolare sono termini *correlativi*. Qui si parla d'algoritmo, e però si ha in mira la sua *virtù operativa*, e non la sua forma materiale. La mano d'una perfetta statua di cera è simile alla mano di un uomo vivente: si dirà per questo che la mano della statua abbia la virtù della mano dell'uomo?

Pare che si possa pronosticare esservi un sistema concatenato algoritmico anche per i differenti ordini di equazione; ma questo

sistema non potrà essere stabilito giammai colle viste, dirò così, spolpate, e coi semplici scheletri aritmetici usati fin qui; e meno poi colle considerazioni trascendentali ed assolute del sig. Wronski. Converrà migliorare e completare il metodo, e ristabilire sulle sue basi naturali la scienza, altrimenti non si farà che sempre più traviare o dar di cozzo contro uno scoglio insuperabile. La boria di sapere e di poter tutto colle cognizioni che si posseggono, è un insulto alla ragione umana. Con questa boria si tenta anche di spegnere la speranza di migliorare facendo credere impossibile di giungere ad una meta perchè non fu raggiunta traviando. Se noi, per esempio, dovessimo prestare una cieca fede a quanto dice il sig. Wronski, noi dovremmo giungere ad una conclusione, la quale nell'atto che sarebbe fatale alle matematiche, formerebbe un pessimo augurio per tutto lo scibile umano. Se l'algoritmo veramente utile fosse abbandonato al caso, se nel ramo il più semplice, il più antico e il più universale dell'umano sapere fosse necessario commettersi all'impero d'una cieca fortuna, che cosa sarebbe dell'arte tutta di pensare e d'insegnare? A che giova rompersi la testa in

teorie, direbbe taluno, se quando veniamo al fatto pratico siamo costretti di darci in braccio alla fortuna? Allora torna meglio gittarsi a dirittura ad occhi chiusi nel pelago che ci deve trascinare, invece di stemprarci il cervello onde acquistare una possanza illusoria. A questa conclusione spinge il trascendentalismo sfrenato. *Fiat nox*, egli par dire al genere umano: ma coll'augurar la notte perpetua ed universale, non pronuncia forse un voto impotente?

19. Le buone formole costituiscono certamente il miglior frutto della teorica delle arti. Ma per trovare quelle che sono veramente buone, per ben esprimerle, per ben ritenerle e per facilmente applicarle, che cosa convien fare? Eccoci alla seconda disquisizione proposta al n.º 14 di questo Discorso. — Abbiamo detto che nell'algoritmo concorrono le *quantità impostate*, le *logie* ed i *movimenti*. I movimenti sono diretti dalle logie, e le logie sono determinate dall'aspetto degli oggetti contemplati. È dunque prima di tutto necessario che l'aspetto degli oggetti sia atteggiato in modo da suscitare in noi le logie algoritmiche, e quindi determinare i movimenti.

Atteggiare questo aspetto appartiene alla

buona costruzione ed alla buona posizione dell'oggetto da esaminarsi. La *bontà* d'una costruzione consiste nel presentare gli elementi dai quali sorger possano i mezzi termini logici. Ma quali saranno le buone costruzioni algoritmiche almeno per l'insegnamento primitivo? Quelle dei *simboli* i quali rappresentino ai sensi gli elementi necessari a far sortire i mezzi termini di valutazione e la maniera d'impiegarli. Dico anche la maniera d'impiegarli, perocchè non si tratta solamente di giovare alla parte ostensiva, ma eziandio di dirigere la parte operativa.

In conseguenza di ciò dico che le vere figure algoritmiche debbono essere costrutte ben diversamente da quelle che comunemente sono presentate agli apprendenti; ed invece si deve ripigliare l'antichissimo costume di costruire figure *complesse*. L'importanza delle figure complesse fu sentita anche dal celebre Leibnitz, il quale, dopo avere annotato che il primo a rompere il ghiaccio in questa parte fu Giovanni Keplero, nel libro secondo del suo *Harmonicon*, prosegue dicendo che con queste complicazioni non solamente si può arricchire la geometria d'infiniti nuovi teoremi, ma eziandio che questa è l'unica strada di penetrare negli arcani

della natura. Il primo motivo vien da lui provato col far osservare che con ogni complicazione si forma una nuova figura composta. Studiando le di lei proprietà si creano nuovi teoremi e si danno nuove dimostrazioni. Quanto poi al secondo motivo riguardante lo studio della natura, osserva che tutte le cose grandi sono formate dalle piccole, qualunque sia il nome che dar vogliate a queste cose piccole. Chiamatele *atomi, molecole, elementi* ecc., sarà sempre vero che la legge apparente della natura fisica sarà sempre questa. Qui l'autore distingue le figure in rettilinee e in curvilinee, e facendo valere il buon senso sperimentale e naturale non tenta di confondere i concetti umani con finzioni sofistiche, ma rispetta le essenze logiche delle cose. « *Figura omnis simplex (dic' egli), aut rectilinea, aut curvilinea est. Rectilineæ omnes symmetræ: commune enim omnium principium triangulus. Ex ejus variis complicationibus congruis omnes figuræ rectilineæ coeunt; idest non hiantes, oriuntur* ». Qui Leibnitz ci annunzia un risultato scientifico delle figure rettilinee. Egli esprime il principio filosofico, che ogni figura rettilinea si può risolvere finalmente nel triangolo. Dopo ciò

prosegue; « Verum curvilinearum, neque
 « circulus in ovalem etc., neque contra re-
 « duci potest, neque ad aliquid commune ». Qual è lo spirito di questa proposizione di Leibnitz? Che le essenze logiche delle cose essendo immutabili, non si possono tradurre le une nelle altre nè meno per equivalenza tutte le volte che il diverso loro concetto sia univoco. Questo ha luogo anche fra gli oggetti dello stesso genere, come appunto fra il circolo e l'elisse. Da questa proposizione stessa emerge che il principio formale della figura è la stessa figura, come fu detto nel principio di questi Discorsi.

Dopo queste distinzioni Leibnitz prosiegue col classificare le costruzioni, distinguendo quelle di forma continua da quelle di forma discontinua allorchè ci figuriamo vacui intermedj ch'egli chiama *hiatus*. Egli accenna le zone, ossia le liste estese. Egli dice positivamente che « *linea lineæ non nisi ejusdem*
 « *generis imponi potest, verbigratia, recta*
 « *rectæ; curvilinea ejusdem generis et sec-*
 « *tionis* ». Parlando poi della costruzione complessa delle figure discontinue ch'egli chiama tessiture, conchiude dicendo: « *Satis*
 « *est prima lineamenta duxisse tractationis*
 « *de texturis hactenus fere neglectæ* ». Queste

furono anche trascurate totalmente dappoi.

Io invito i lettori a consultare nell' originale tutta questa memoria che versa sull' arte combinatoria (1), e l' altra sui complessi (2), e trarne i principj fondamentali e svolgerli come si deve. Malgrado che il genio di Leibnitz fosse come pianta agitata dal vento dell' estreme generalità, e che quindi piegasse all' impeto, ciò non ostante tornava a rizzarsi, e mai fu strappata dal suolo suo naturale e data in balia del vento che imperversava. Questo è così vero, che, parlando egli del suo parto prediletto pel quale avea dovuto sostenere la lotta con i partigiani di Newton, io voglio dire del calcolo infinitesimale, egli non ha potuto tradire le ispirazioni del buon senso, come far sogliono que' compositori di caratteri algebratici, i quali stanno al senso materiale delle cose. In Leibnitz la coscienza del vero non fu soffocata dall' amor di padre. La voce del filosofo si unì a quella del matematico per pronunciare la decisione ultima del suo genio.

(1) Questa trovasi nel tomo secondo, parte prima, pag. 340 in avanti.

(2) Che trovasi nel principio del tomo terzo.

Con questa decisione fece trionfare la filosofia a dispetto dell' impostura. Abbenchè io creda che la lettura di questa decisione non sia per correggere quella plebe la quale vuole agire senza coscienza logica, ciò non ostante io avviso di riprodurla per preservativo degli altri che non amano di essere zimbello delle illusioni (1).

20. La costruzione *complessa* delle figure è destinata a concretare e ad agevolare tanto lo studio della parte teorica, quanto le funzioni della parte pratica delle matematiche. Ecco lo *scopo* di questa costruzione. Essa, come fu già detto, deve essere atteggiata in modo da far sorgere le logie, e quindi gli algoritmi. Ecco la *forma di ragione* di questa costruzione. Ma con questa proposizione non si indicano che le *condizioni finali* della costruzione, e non la *forma positiva* e sensibile dei simboli e dei modelli. Ora si domanda come deve essere disegnata questa forma.

Cercare come dev'essere conformata una figura onde riescire algoritmica, presuppone

(1) Vedi questo Tratto di Leibnitz a piedi di questo discorso.

una scelta fatta fra mille altre che l'immaginazione può creare. Quale dunque sarà il criterio di questa scelta? Questa domanda involge due requisiti in colui che deve farla. Il primo, ch'egli conosca perfettamente gli *ufficij* ai quali servir deve la figura. Il secondo, ch'egli trascelga quei tratti che sono idonei a prestare questi ufficij. Servire al calcolo, ecco l'ufficio generale ed *ultimo* della figura algoritmica e della sua costruzione. Ma tre specie di calcolo esister debbono nell'orbe matematico. Il primo è lo *sperimentale*, che denominammo anche *iniziativo*: il secondo è il *logistico*, che denominammo anche *derivativo*: il terzo finalmente è il *sinottico*, che appellammo anche di *unificazione*. In queste tre specie di calcolo l'oggetto materiale è sempre lo stesso, ma noi lavorar dobbiamo su di lui in diversa maniera. Così, per esempio, nel calcolo sperimentale si tratta di scoprire i fatti dei numeri matematici. Nel logistico di determinare le leggi comuni. Nel sinottico finalmente di riunire i due algoritmi e ritornare con coscienza filosofica sullo stesso oggetto. Si piglierebbe un grande abbaglio se si confondessero questi tre aspetti del calcolo colle specie ora conosciute e praticate. Esse in-

tervengono , e intervenire possono bensì come *sussidj* , ma non costituire i veri caratteri specifici di questi aspetti. Ciò verrà spiegato meglio nel Discorso nel quale esporrò i tratti principali del metodo primitivo proposto.

Proseguiamo. Le tre forme di calcolo suddette esigono viste diverse. Dunque per ogni specie di calcolo si dovrà scegliere una costruzione corrispondente. Siccome però in tutte tre le specie è di mestieri sempre presentare i mezzi termini logici , così ogni figura dovrà racchiudere la costruzione valevole a somministrare questo mezzo termine. Havvi dunque una costruzione *dominante* per tutte e tre le parti del calcolo teorico , ed havvene una propria e *subalterna* adattata ad ogni specie di calcolo. La costruzione dominante deve racchiudere gli elementi dell'identità e della diversità , dell'uguaglianza o della disuguaglianza , del discreto e del continuo , del diviso e dell'unito , dell'assoluto e del comparato , come condizioni essenziali ai mezzi termini logici. La costruzione subalterna poi deve racchiudere le particolarità che dipendono e si raunodano col mezzo termine comune. Qui per non divagare in discorsi generali dovrei parlare delle forme relative al calcolo sperimentale o ini-

ziativo ; ma questo è argomento proprio del Discorso nel quale ho divisato di esporre i tratti principali del metodo suddetto.

Ora mi resta a parlare d' un'altra costruzione , e questa è quella dei MODELLI DELLE FUNZIONI. Altra è la costruzione delle varie forme della quantità estesa , ed altra è la costruzione dei modelli delle funzioni. Le prime dir si potrebbero modelli di proposta : i secondi modelli di sviluppo. Coi modelli di proposta si cercano e si determinano i valori fondamentali dei composti geometrici. Coi modelli di sviluppo si ripartiscono , si riducono , si amplificano , si associano ec. ec. Coi risultati emergenti dall' esame della proposta si passa a costruire le funzioni. I modelli dunque di proposta si possono appellare *antecedenti* : quelli di funzione dir si possono *conseguenti*. I primi si possono raffigurare come parte d' ingresso : i secondi come altrettante guide conducenti ad esplorare i seni reconditi dei composti algoritmici. L'arte di costruire questi modelli si potrebbe denominare *simbolica matematica*.

21. Mi si domanderà se con modelli sensibili e perpetui si possano convenevolmente rappresentare le funzioni principali algoritmiche? Il fatto risponderà meglio delle parole.

Con questo fatto si vedrà che almeno nell'insegnamento primitivo si presta una tale stabilità, una tale facilità ed una tale evidenza alle operazioni algoritmiche, che non solamente non si possono dimenticare più, ma aprono una strada a scoperte importantissime. Nè qui temer si potrebbe di privar la matematica di quella semplicità e generalità che la rende, o almeno render la dovrebbe pregevole; imperocchè non si eccede la sfera delle figure geometriche. Ciò mette al coperto il punto della semplicità. « Nihil » (diceva il Leibnitz) in rebus corporeis « figura prius, simplicius et a materia abstractius cogitando consequi licet » (1).

Quanto poi alla generalità osservo che essa in ultima analisi è un'identità applicata a tutti gli oggetti di un dato genere. Ora le figure geometriche algoritmiche non sono, specialmente nel primo insegnamento, fuorchè la stessa figura assoggettata a diversi valori a norma delle diverse divisioni e proporzioni congegnate. Dunque rilevati una volta in una costruzione i caratteri ed i rapporti che esi-

(1) *Epistola quarta ad Thomasium. Opera omnia*, tom. 4, pag. 22.

stano indipendentemente dai valori particolari, non si può temere che i risultati manchino di quella generalità che desiderar giustamente si può nelle matematiche. Soggiungo poi, che il cogliere precisamente queste generalità appartiene al secondo stadio dell'insegnamento. E però quando anche nel primo non si annotassero fuorchè i particolari, colla semplice coscienza della loro particolarità si avrebbe fatto assaissimo per il vero e solido frutto della scienza. L'istinto di generalizzare in matematica deve essere frenato per il motivo stesso che in psicologia deve essere risvegliata l'analisi dell'uomo interiore. Ingerire la coscienza matematica vale assai più che far correre la mente per le oasi dei teoremi e per le giostre dei problemi.

22. Tutto considerato, io oso di affermare che senza la pratica di questi modelli la matematica tutta non acquisterà mai e poi mai quel corpo, quell'anima e quella vita che deve avere, e che presso di noi in oggi non ha. A questa proposizione alzeranno forse altissimo grido di scandalo tutti quegli uomini volgari, i quali, abituati ad una cieca pratica, si appoggiano all'idolo dell'esempio. Me se fossero suscettibili di un poco di buona filosofia, si accorgerebbero che io non

ho bestemmiato , ma che tendo a promuovere il vero studio delle matematiche. Se col generalizzare le idee non si debbono mutilare , con pari ragione le idee competenti non si dovranno presentare in nube e in una maniera così fugace da sfuggire ad una analisi ponderata. Senza idee distinte , stabili e lucide è impossibile cogliere tutto il vero. Dove la memoria non ci può presentare uno specchio fermo , fedele e luminoso , supplir si deve altrimenti. La prima rappresentazione dell' oggetto decide di tutti i concetti e di tutti i risultati conseguenti. Ricordiamoci che nell' arte convien vedere per operare , e convien veder bene per operar bene. Ma credete voi di veder bene a proporzione che vedete più in generale , e col soccorso della sola *fantasia* , o non piuttosto a proporzione che acquistate una maggior facoltà ad operare utilmente ? Perchè insegnate voi la matematica ? Forse per addestrare i vostri allievi a fabbricare castelli in aria , e ad eseguire giuochi di forza , o non piuttosto per somministrar loro un mezzo d'indovinar meglio la natura e di esercitare arti utili ? E quand' anche far voleste delle matematiche oggetto di mera specolazione , non è forse vero che voi dovrete proporvi di

cogliere il pieno fatto ed il pieno vero? Ora questo pieno fatto e questo pieno vero non si coglie a proporzione che si fanno sfumare le differenze individuali, o che si avvolgono nelle nuvole del fantastico, ma bensì a proporzione che si afferrano quei rapporti distinti e complessivi, i quali ci danno in mano le redini dell'umano sapere. Senza di ciò voi imitereste il cane della favola, il quale per cogliere la carne da lui veduta nello specchio dell'acqua, perdette anche quella ch'egli teneva in realtà.

La quantità estesa limitata e variamente determinata forma o no la materia PRIMA ed unica della matematica pura? Qui non v'è dubbio. Ecco dunque il *campo* entro il quale dobbiamo aggirarci. Di che si vale la mente nostra per esplorare questo campo? Leggete, svolgete, meditate, e troverete ch'essa si vale del solo *sensu aritmetico*, il quale altro non è, che la facoltà nostra di distinguere, cui in matematica applichiamo alla quantità estesa. Ora vi domando: Col *nulla di esistenza* si può forse ragionare in aritmetica? Voi mi rispondete di no. Come in aritmetica non si può ragionare col nulla di esistenza, così pure in geometria non si può ragionare col *nulla di estensione*.

Questo è ancor poco. Siccome il giudizio dell'esistenza suppone il *fatto* della cosa esistente, e la distinzione di più esistenze inchiude essenzialmente il fatto di più cose esistenti; così ne viene la conseguenza che l'idea dell'esteso limitato precede, coesiste, ed è accoppiata colle logie di distinzione; così che tolti i concetti assoluti dei fatti estesi, cessano i concetti relativi, ossia le logie che ne furono provocate.

Spingiamo le considerazioni alla massima possibile generalità. Noi esprimiamo tanto l'esistenza dei *fatti*, quanto l'esistenza delle *logie*. Così noi esprimiamo tanto una serie di suoni, quanto una serie di pause. Usando quindi della denominazione puramente astratta di uno o più, non esprimiamo nulla di *positivo*, ma solamente accenniamo un'esistenza di qualunque cosa. Questa cosa può essere ora un ente reale, ora un ente di ragione, ora un'essenza, ora una modalità, ora uno stato d'una cosa esterna, ora un atto nostro interno, ora un termine d'una serie, ora il posto di questo termine: in breve l'espressione puramente astratta dell'uno o più, altro non è che una traduzione del verbo essere. Dir dunque che la rigorosa unità metafisica non si può dividere, egli è lo

stesso che dire che l'idea astratta di esistenza non si può tradurre in un'altra, e che la divisione di questa idea non è che *ripetizione* della stessa idea. Questa idea predomina tanto i concetti assoluti, quanto i relativi, tanto i geometrici, quanto gli aritmetici, tanto le funzioni nelle quali si tratta di apprendere, quanto quelle nelle quali si tratta di distinguere ecc. Essa in sostanza riducesi alla funzione nostra universale di sentire e nulla più. Essere e sentire, quanto alla nostra intelligenza, si risolve nello stesso fatto.

Ciò posto, venendo al campo della quantità *estesa*, siamo condotti alla conclusione che non si potrà tradurre l'uno esteso in qualunque altro concetto senza annientarlo. Ma l'uno esteso è un oggetto che noi figuriamo suscettibile di *aumento* o di *decremento*. Questa proprietà fa sì ch'egli possa formare un *centro logico*, il quale riunisca *identità e varietà* collo *stesso* soggetto sostanziale. In questa suscettibilità sta in ultima analisi riposta la *possanza di mezzo termine logico*. Togliete questo duplice carattere, e voi annientate tutta la *possanza algoritmica*.

La *possanza algoritmica* è dunque essenzialmente ed esclusivamente riposta nel con-

cetto dell' esteso *finito e determinato*. Ma se l' esteso deve esistere e sussister sempre, e se dall' altra parte esso dev' essere atteggiato giusta i rapporti dei tre stati possibili della quantità escogitabile, cioè col più, col meno e coll' eguale, egli ne viene la irrefragabile conseguenza che l' esteso non dovrà essere *annientato giammai*, ma unicamente *limitato* a norma dei tre stati nei quali egli può esistere. Ma che cosa è un esteso *limitato*, fuorchè un esteso *figurato*? Assumete l'idea astratta di una superficie limitata, che cosa sarà altro che figura geometrica? L' idea stessa dello spazio indefinito che cosa è veramente, fuorchè l' idea astratta di estensione, alla quale non prefiniamo limite alcuno? Che cosa è o può essere l' *uno* esteso, sia elementare, sia misuratore, fuorchè una data superficie figurata destinata a servire di *componente* o di *confrontante* di un valore intellettuale rispettivo? Ma questa qualità di uno è sempre *relativa*, talchè esser potrà atomo, digito, palmo, grano, oncia ecc. Io prego il mio lettore a ben ponderare la forza di questi dati certissimi e dimostrati. Essi sono precipui e massimi per determinare il vero *centro di gravità* di tutto il corpo delle dottrine matematiche, e per fissare il perno unico sul quale esse si debbono aggirare.

Fissato questo punto capitale, ognun vede che se coi modelli si rendono sensibili i diversi stati dell'esteso e le relazioni scambievoli che ne nascono, e se dall'altra parte la mente nostra non può nè ben esprimerli, nè ben esaminarli, se non sono resi fermi, chiari e ben atteggiati per l'algoritmo, egli ne segue che le matematiche non acquisteranno mai senza di essi quel lume, quell'estensione e quella forza alla quale esse possono pervenire.

Quanto ai modelli di proposta, la cosa apparisce anche dalle sole osservazioni fatte col Leibnitz, e dal principio generale già avvertito nell'introduzione, che per le costruzioni della matematica pura noi non abbiamo niente fuori di noi, che naturalmente ce le rappresenti, e niente dentro di noi che naturalmente ce le suggerisca. Quanto poi ai modelli delle *funzioni* algoritmiche, basta solamente richiamare ciò che ho esposto nei N. 14, 15, 16, 18, 21 dell'antecedente Discorso, ed unirle a ciò che testè ho dimostrato, per convincersi di questa mia sentenza.

23. Per ultimo a piena conferma dell'opinion mia soggiungo quanto segue. È certo che due grandezze qualunque paragonate

fanno necessariamente nascere fra di loro una data *Ragione*. Questa Ragione è correlativa alla *differenza totale* che passa fra le grandezze paragonate. Così fra il quadrato superficiale di 9 e il quadrato superficiale di 16 havvi la sua ragione propria a cui corrisponde la differenza totale di 7. Ciò che diciamo delle grandezze superficiali aritmeticamente quadrate, si verifica pur anche nelle altre che non sono tali. Così fra due grandezze superficiali, l'una dupla o tripla dell'altra, havvi la sua ragion propria a cui corrisponde la sua differenza totale. È certo che questa *differenza* costituisce per sé medesima una quantità sostanziale, la quale deve essere rappresentata per sé stessa per tutti i bisogni della valutazione. I gnomoni, per esempio, nei quadrati sono di questa specie. Ma dall'altra parte è certo che in tutte le proporzioni associate è impossibile effettuare valutazione alcuna senza estrar dal gnomone il quadrato dello spigolo (1), non

(1) Per quadrato dello spigolo s'intende qui quello che vien formato dall'incrocciamento delle due braccia del gnomone. Io domando alla plebe calcolante, *di che* si tratta qui, sotto al simbolo figurato di questi quadrati di questi gnomoni, di questi quadrati spigolari, di queste braccia?

solo per formarne un estremo di calcolo, ma eziandio per far risultare i due medj.

Questo non è ancor tutto. È certo che le proporzioni diventano tanto più *compatte* quanto più l'espression loro si avvicina ai *primi* termini della scala naturale numerica. E però considerando la progressione loro continua in ordine retrogrado, se l'espressione della loro differenza si va grado grado restringendo, va di pari passo ingrossandosi la quantità, ossia la differenza totale fra l'una e l'altra grandezza. Così progredendo si divide, e retrocendo si riunisce. Ma in questo processo che cosa nasce? Nascono sempre nuove proporzioni intime in ragione della varia grandezza, la quale la lista gnomonica va contraendo. Del pari sorgono varj stati tanto negli estremi quanto nei medj, tanto nelle grandi parti componenti, quanto nelle potenze estriusecamente paragonate. Da ciò appariscono nuovi rapporti, e quindi nuovi elementi di commensurazione.

Qui non finisce ancor la cosa. Questi stati non sono nè considerar si possono *isolati*, ma hanno una relazione di *filiiazione*, sia salendo, sia discendendo, talchè la relazione di *dominante* e di *dipendente* si associa col carattere di crescente e decrescente,

di estremi e di medj, di coefficienti e di complessivi ec. ec. Nelle operazioni nelle quali si usano *frazioni*, *esponenti*, *fattori*, *differenziali*, *serie* ecc. ecc., sempre e poi sempre si allude all'idea di un tutto. L'alludere ad un tutto è una considerazione comune in tutte queste operazioni. Ora per rendere *esplicito* l'oggetto di questa allusione e per far sortire e rendere operativi i rapporti, ossia le logie che nascono nel paragonare questo tutto colle altre idee suddette, in una parola per formare e atteggiare il vero *mezzo termine algoritmico* basterà forse supputare come si fa nell'aritmetica volgare? Voi non cogliereste mai nel punto. Convienne all'opposto **RAPPORTARE** l'operazione ad un *centro logico di identità*, in modo che alle successive varietà ed alle successive differenze si associno le viste della perpetua *concorrenza logica* conforme alla generazione naturale delle quantità e dei rapporti della data operazione proposta.

Ora parlando della quantità estesa, vi domando se colle *sole cifre* sia possibile rappresentare alla mente i varj stati o isolati o complessivi, o fissi o varianti, o primitivi o secondarj, o progressivi o regressivi, o dominanti o dipendenti necessarij alla

loro valutazione. Non solamente coll' usare delle sole cifre è impossibile di far tutto questo, ma restringendosi ad esse si *nasconde* positivamente il punto di allusione, e quindi la relazione logica fondamentale che predominar deve sulla vostra operazione.

Sollevate, se potete, lo sguardo all' ultima considerazione fondamentale della posanza algoritmica. Dopo averla ben raffigurata vi prego di fermar l' attenzione sul mezzo termine, del quale facciam uso per valutare la quantità estesa. Questo mezzo termine, come ho già avvertito (1), ha tre forme, cioè quelle del più, del meno e dell' eguale. Queste tre forme sono sempre accoppiate, ma ora predomina la vista dell' una, ora quella dell' altra. Così, per es., nei quadrati perfetti aritmetici e geometrici qualunque si paragonino grandezze disuguali, ciò non ostante predomina la *ragione* dell' eguaglianza (2). Le forme del più e del meno, delle quali parliamo qui, non appartengono allo *stato materiale* delle grandezze, ma alla *ragion logica nascosta* che ne forma, dirò così, il carattere morale. Questo più e

(1) Vedi Discorso 3.º, n.º 14, pag. 223-224.

(2) Vedi Discorso 3.º, n.º 18, pag. 250-254.

questo meno poi non si desume da una vaghà possibilità, ma bensì dall' essere una data grandezza al di sopra o al di sotto dello stato di perfetto quadrato aritmetico e geometrico. Questo stato si verifica in tutte quelle grandezze alle quali gli algebristi attribuiscono le così dette *radici sorde*.

Supponiamo per ipotesi che rispetto a queste grandezze si ritrovi e si giunga a quella equazione logica, la quale è richiesta dalla vera natura e dagli essenziali rapporti della continuità. In questo caso i mezzi termini per valutare queste grandezze racchiuderanno certe condizioni; ma la *ragione* dell'eguaglianza presterà la sua sanzione al calcolo. Ma colle sole cifre aritmetiche, e meno poi colle algebriche, non si potrà mai salire alla prima generazione dell' algoritmo. L'algebra non solamente suppone questa generazione, ma incomincia ad esercitare la sua possanza solamente *dopo* che nacque, dirò così, la parola matematica, e senza poter mostrare come nacque ed originariamente si sviluppò.

All' opposto colla geometria di valutazione prefinita nella sua tendenza, obbligata nel suo maneggio ed omogenea nelle sue conclusioni, quale appunto fu caratterizzata nel

N.º 22 dell' antecedente Discorso , questa parola si palesa in una maniera lucidissima. Così dove incomincia la possanza algebrica si potrà far finire il *primo* sviluppo della geometria di valutazione.

Venendo ora al metodo naturale matematico , quale sarà la conseguenza di questa quanto facile, altrettanto luminosa impresa? Che restringersi alla sola indicazione delle cifre egli è un voler navigare senza bussola e senza la carta avanti gli occhi. Si potrà giungere a qualche fine perchè si sente all'ingrosso la tendenza algoritmica ; ma è forse questo il lucido e compito processo delle matematiche? Vi sono stati uomini zotici che hanno sorpreso il mondo per la loro possanza nel fare conti a memoria. Ma che perciò? La vera matematica è forse ristretta alla volgare aritmetica? Collo studio di queste cifre mi potrete bensì segnare alcune *grandi e comuni* logie puramente *aritmetiche* , ma non m' indicherete mai le connessioni e le relazioni di fatto , le quali sorgono dallo stato complessivo delle proporzioni delle grandezze estese coesistenti ed associate. Ma se mancano queste connessioni voi non mi potrete condurre giammai a cogliere il vero mezzo termine delle valutazioni subalterne.

Io potrei convalidare la mia sentenza anche coll'esame dello spirito dei diversi metodi in oggi usati. Come verrebbe posta in chiaro la loro incompetenza, così verrebbe dimostrata la loro correzione. Ma ciò mi spingerebbe fuori dei limiti che mi sono proposto. Attenendomi invece all'oggetto proprio di questo Discorso, credo di poter concludere colla seguente

T E S I

Lo studio e l'insegnamento specialmente primitivo delle matematiche deve essere fatto simbolicamente nel senso sopra spiegato

I. Atteso l'oggetto veramente logico delle matematiche.

II. Atteso i bisogni della ragione e la tendenza naturale ed invincibile del nostro intimo senso.

III. Atteso lo scopo morale e sociale delle matematiche.

IV. Atteso finalmente l'imperiosa necessità di adattarsi allo stato mentale degli apprendenti.

Fine del Discorso quarto.

LETTRE

A MONSIEUR DANGICOURT

*écrite en septembre 1716 sur les monades
et le calcul infinitésimal.*

II. **P**our ce qui est du calcul des infinitésimales, je ne suis pas tout à fait content des expressions de monsieur *Herman* dans sa réponse à monsieur *Nicu-wentyt*, ni des nos autres amis. Et monsieur *Naudé* a raison d'y faire des oppositions. Quand ils disputèrent en France avec l'abbé *Gallois*, le Père *Gouge* et d'autres, je leur témoignai, que je ne croyois point qu'il y eut des grandeurs véritablement infinies ni véritablement infinitésimales, que ce n'étoient que des fictions, mais des fictions utiles pour abrégé et pour parler universellement, comme les racines imaginaires dans l'algèbre, telles que $\sqrt{-1}$; qu'il faut concevoir, par exemple, (1) le diamètre d'un petit élément d'un grain de sable, (2) le diamètre du grain de sable même, (3) celui du globe de la terre, (4) la distance d'une fixe de nous, (5) la grandeur de tout le système des fixes, comme (1) une différentielle du second degré, (2) une différentielle du premier degré, (3) une ligne ordinaire assignable, (4) une ligne infinie, (5) une ligne infiniment infinie. Et plus

on faisait la proportion ou l'intervalle grand entre ces degrés, plus on approchoit de l'exactitude, et plus on pouvoit rendre l'erreur petite, et même la retrancher tout d'un coup par la fiction d'un intervalle infini, qui pouvoit toujours être réalisée à la façon de démontrer d'*Archimède*. Mais comme monsieur de *Hospital* croyait que par là je trahissois la cause, ils me prièrent de n'en rien dire outre ce que j'en avois dit dans un endroit des Actes de Leipsic, et il me fut aisé de déferer à leur prière.

III. Pour venir enfin à $\frac{0}{\infty}$ ou zéro divisé par l'infini, et choses semblables, je dis que cela aussi ne peut avoir lieu que dans une interprétation commode, en prenant zéro pour un nombre d'une grande petitesse, et l'infini pour un nombre très grand. Or plus vous diminuerez le numérateur, et plus vous augmenterez à proportion le dénominateur de la fraction, plus vous approcherez du zéro $\frac{1 : 10}{10} = \frac{1}{100}$ et $\frac{1 : 100}{100} = \frac{1}{10000}$ et $\frac{1 : 1000}{1000} = \frac{1}{1000000}$ ce qui va vers $\frac{0}{\infty} = 0$, ou $\frac{1 : \infty}{\infty} = 0$, ou $\frac{1}{\infty \infty} = 0$, de sorte que le carré de l'infini, multiplié par le zéro, donneroit l'unité. Mais on peut dire que cela y va, et non pas qu'il y arrive; car à la rigueur *nihilum*, qui est l'extrémité des nombres en diminuant, devoit ainsi être divisé par *omnia*, qui est l'extrémité des nombres en augmentant. Mais l'*omnia* pris comme *numerus maximus* est une chose contradictoire comme *numerus minimus*. Les deux extrémités *nihil* et *omnia* sont hors des nombres, *extremities exclusæ non inclusæ*.

IV. Il est aisé de tomber dans des patalogismes quand on ne rectifie pas ces choses par les idées que je viens de donner. Un habile mathématicien de Pise, nommé *Guido Grandi*, avoit soutenu qu'une infinité de riens ou zéros ajoutés ensemble faisoient une grandeur assignable, et ainsi par une élégante allégorie il illustroit la production des créatures du rien par le moyen de l'infini. Monsieur *Alessandro Marchetti*, autre habile mathématicien de Pise, s'y opposa, disant qu'une infinité de riens ne seroit jamais autre chose que rien. Et prenant le rien à la rigueur, il avoit raison. Cependant le Père *Grandi* prouvoit sa proposition par la division. Vous savez, monsieur,

qu'en divisant $\frac{1}{1 \times a}$ ou $1 : 1 \times a = 1 - a \times a^2 -$

$a^3 \times a^4 - a^5$ etc.^a à l'infini. Dont a étant 1, il viendra

$\frac{1}{1 \times 1} = 1 : 2 = 1 - 1 \times 1 - 1 \times 1 - 1$ etc.^a à

l'infini, ce qui fera $\frac{1}{2} = 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0$ etc.^a On

m'a consulté la dessus, et voici comme je crois d'avoir déchiffré l'énigme. Il ne faut point dire qu'une infinité de riens pris à la rigueur fassent quelque chose, aussi cette série ne le dit point, quoique elle paroisse le dire. Pour le bien entendre il faut la résoudre en séries finies approchantes de l'infinie. Soit donc la série $1 - 1 \times 1 - 1$ etc.^a finie, alors si vous prenez un nombre impair, par exemple 7 unités $1 - 1 \times 1 - 1 \times 1 - 1 \times 1$, le tout fait 1. Or lors que cela ce termine dans l'infinie où il n'y a ni pair ni impair, il faut prendre le milieu arithmétique entre 1 et 0, qui est $\frac{1}{2}$. Car dans les estimes ambiguës, quand il n'y a

pas plus de raison pour l'un que pour l'autre, il faut prendre le milieu arithmétique. Par exemple entre l et m il faut prendre $\frac{l \times m}{2}$, c'est à dire $\frac{o \times 1}{2}$, c'est à dire $\frac{1}{2}$.

V. J'ai taché de m'expliquer, et j'espère d'avoir réussi passablement à l'égard d'une personne de votre pénétration; mais quant aux difficultés qui peuvent rester dans une matière aussi difficile que celle dont il s'agit, je tacherai d'y satisfaire, et ce sera le moyen d'éclaircir la vérité. Au reste je suis etc.^a

Tomo 3, pag. 500 e seg.

Hann. le 11 septembre 1716.

PROSPETTO

DEGLI ARGOMENTI DEL DISCORSO QUARTO.

1. Della scelta degli oggetti dell' Istruzione primitiva matematica in mira allo scopo morale e sociale di lei. Distinzione dell' oggetto logico dal materiale.

2. Entro quali *confini* versar debba la detta istruzione.

3. Con qual *ordine* ne debbano esser presentati gli oggetti logici. Taccia a Baccone ed agli Enciclopedisti francesi.

4. Della scienza e dell' arte. Legge suprema a cui soggiacciono.

5. Conseguenze pel metodo dell' insegnamento. Sua triplice opportunità.

6. Dell' imitazione degli antichissimi coltivatori delle Matematiche.

7. Processo logico della parte dimostrativa. Sue funzioni eminenti.

8. Della funzione di distinguere. Attitudine dei diversi cervelli.

9. Delle funzioni sussidiarie al ben distinguere.

10. Della prima proposta filosofica. Suoi limiti, suo intento, suo spirito eminente.

11. Della forma logica della prima proposta degli oggetti. Bando della forma sintetica.

12. Della funzione di connettere. Sue condizioni.

13. Della funzione di esprimere.

14. Della rappresentazione competente sì intellettuale che sensibile delle cose e degli algoritmi.

15. Della competenza algoritmica. Osservazione fondamentale per ottenere la bontà assoluta.

16. Fatti comprovanti la incompetenza assoluta dell'astratto smodato.

17. Delle formole competenti.

18. Se l'algoritmo delle equazioni sia puramente fortuito.

19. Della rappresentazione sensibile degli oggetti e delle funzioni algoritmiche.

20. Delle diverse costruzioni sensibili algoritmiche.

21. Utilità dei modelli.

22. Necessità assoluta ed universale dei modelli proposti.

23. Si conferma la detta necessità.

VOLA POSOMETRICA.

CI	Gnomoni	Quadrati	RADICI	Gnomoni	Quadrati	RADICI	Gnomoni	Quadrati
	<u>99</u>	2500	00	000	0000	<u>100</u>	<u>199</u>	<u>1,0000</u>
	<u>97</u>	2401	<u>51</u>	101	2601	<u>99</u>	<u>197</u>	9801
	<u>95</u>	2304	<u>52</u>	103	2704	<u>98</u>	<u>195</u>	9604
	<u>93</u>	2209	<u>53</u>	105	2809	<u>97</u>	<u>193</u>	9409
	<u>91</u>	2116	<u>54</u>	107	2916	<u>96</u>	<u>191</u>	9216
	<u>89</u>	2025	<u>55</u>	109	3025	<u>95</u>	<u>189</u>	9025
	<u>87</u>	1936	56	111	3136	94	<u>187</u>	8836
	<u>85</u>	1849	57	113	3249	<u>93</u>	<u>185</u>	8649
	<u>83</u>	1764	<u>58</u>	115	3364	<u>92</u>	<u>183</u>	8464
	<u>81</u>	1681	<u>59</u>	117	3481	91	<u>181</u>	8281
	<u>79</u>	1600	<u>60</u>	119	3600	<u>90</u>	<u>179</u>	8100
	<u>77</u>	1521	<u>61</u>	121	3721	<u>89</u>	<u>177</u>	7921
	<u>75</u>	1444	<u>62</u>	123	3844	<u>88</u>	<u>175</u>	7744
	<u>73</u>	1369	<u>63</u>	125	3969	<u>87</u>	<u>173</u>	7569
	<u>71</u>	1296	64	127	4096	86	<u>171</u>	7396
	<u>69</u>	1225	<u>65</u>	129	4225	<u>85</u>	<u>169</u>	7225
	<u>67</u>	<u>1156</u>	<u>66</u>	131	4356	<u>84</u>	<u>167</u>	7056
	<u>65</u>	1089	<u>67</u>	133	4489	<u>83</u>	<u>165</u>	6889
	<u>63</u>	1024	<u>68</u>	135	4624	<u>82</u>	<u>163</u>	6724
	<u>61</u>	961	69	137	4761	81	<u>161</u>	6561
	<u>59</u>	900	<u>70</u>	139	4900	<u>80</u>	<u>159</u>	6400
	<u>57</u>	<u>841</u>	<u>71</u>	141	5041	<u>79</u>	<u>157</u>	6241
	<u>55</u>	784	<u>72</u>	143	<u>5184</u>	<u>78</u>	<u>155</u>	6084
	<u>53</u>	729	<u>73</u>	145	5329	<u>77</u>	<u>153</u>	5929
	<u>51</u>	676	<u>74</u>	147	5476	<u>76</u>	<u>151</u>	5776
			<u>75</u>	<u>149</u>	5625			



005669494

